PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. 1. April 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 8 am 6. April 1917.

INHALT:

Originalmitteilungen:

P. Selényi, Über ein einfaches Analogon der Theorie der offenen Pfeife. S. 133.

Fr. Nölke, Zur Theorie der Luftspiegelungen. S. 134.

P. Debye, Konzentrationselement und Brownsche Bewegung. S. 144.

F. v. Hauer, Zur Theorie der freien Elektronen in Metallen. S. 149.

Besprechungen:

R. H. Weber u. R. Gans, Repertorium der Physik. S. 151.

H. E. Timerding, Die Analyse des Zufalls. S. 152.

Personalien. S. 152.

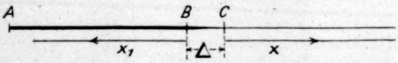
Angebote. S. 152.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über ein einfaches Analogon der Theorie der offenen Pfeife.

Von P. Selényi.

Um die Schwingungsvorgänge der offenen Pfeife unserer mechanischen Einsicht näher zu bringen, kann man von einem Modell (s. Fig. 1)



Gebrauch machen, welches aus einer Saite — von der Länge l und der linearen Dichte ϱ_1 — und aus einer dieser anschließenden unendlich langen, dünneren Saite — von der Dichte ϱ — besteht. Der Übergang der Dichten soll auf einer kleinen Strecke — von der Länge $\triangle$ und der Masse m — stetig erfolgen; die ganze, so zusammengesetzte Saite sei mit einer Kraft P gespannt. Es entspricht hier — wie man sich leicht davon überzeugt — das dickere Saitenstück $\overline{AB}$ der offenen Pfeife, die Strecke $\triangle$ der Korrektur wegen dem offenen Ende und die unendliche, dünnere Saite dem freien Luftraume.

Behandeln wir das System unter der Bedingung, daß der Endpunkt A eine vorgeschriebene Schwingung ausführt; gegeben durch den reellen Teil von dem Ausdruck

$$\xi_A = A \cdot e^{i\omega t}. \tag{1}$$

Aus naheliegenden Gründen nimmt man dann die Elongation von der Strecke $\overline{AB}$ in der Form von zwei stehenden Schwingungen an

$$\xi_1 = [a \cos \mu_1 (x_1 - l) + b \sin \mu_1 (x_1 - l)]\, e^{i\omega t} \tag{2}$$

und die von der unendlich langen Saite in der Form einer fortschreitenden Welle

$$\xi = c \cdot e^{i(\mu x + \delta)} \cdot e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Die zu erfüllenden Grenzbedingungen sind die folgenden: Zuerst ist im Punkte A die Bewegung vorgeschrieben, d. h. es muß

$$(\xi_1)_{x_1 = l} = \xi_A \tag{4}$$

sein.

Dann betreffs der Strecke $\triangle$ gilt die Kontinuitätsbedingung, welche aussagt, daß die Entfernung der Punkte B und C stets gleich $\triangle$ ist, d. h.

$$(\xi)_{x=0} - (\xi_1)_{x_1=0} = \triangle \cdot \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{x=0}. \tag{5}$$

Endlich kommt noch dazu die dynamische Bedingung, wonach die Bewegung der kleinen Masse m durch die Resultate der angreifenden Kräfte erfolgt, wofür der analytische Ausdruck lautet:

$$P\left[\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{x=0} - \left(\frac{d\xi_1}{dx_1}\right)_{x_1=0}\right] = m \cdot \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{x=0}. \tag{6}$$

Wie man sieht, hat der hier behandelte Fall sein Analogon in den Schwingungen der offenen Pfeife, welche durch die vorgeschriebene harmonische Bewegung eines Stempels hervorgebracht werden[1]). Das Geschwindigkeitspotential in der Pfeife hat genau die Form von (2), im freien Luftraum unterscheidet es sich nur durch den Faktor $1/r$ vom Ausdrucke (3); die Grenzbedingung am Stempel entspricht der Gleichung (4) und für das offene Ende gilt zuerst die der Gleichung (5) ähnliche Kontinuitätsbedingung, wonach die kleine Luftmasse um das Rohrende sich wie eine inkompressible Flüssigkeit bewegt, und die der Gleichung (6) entsprechende dynamische Bedingung, wonach die Bewegung dieser kleinen Luftmasse durch die Resultierende der auf sie wirkenden Druckkräfte aufrecht erhalten wird.

Setzt man die Werte von ξ_1 und ξ in die Gleichungen (4), (5) und (6), so erhält man

$$a = A \tag{4a}$$

$$a \cos \mu_1 l - b \sin \mu_1 l = c \cdot e^{i\delta} + i \triangle \cdot \mu \cdot c \cdot e^{i\delta}, \tag{5a}$$

$$P[-(a\mu_1 \sin \mu_1 l + b\mu_1 \cos \mu_1 l) + + ic \cdot \mu e^{i\delta}] = -mc\omega^2 e^{i\delta}. \tag{6a}$$

Um uns sofort auf den Fall der Resonanz zu beschränken, nehmen wir gleich

1) S. Rayleigh, Theorie des Schalles, II. Bd.

$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

an; so daß

$$\mu_1 l = 2\pi \frac{l}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2}; \ \cos\mu_1 l = 0, \ \sin\mu_1 l = 1$$

ist. Setzen wir weiter

$$b = \beta + i\gamma$$

und bemerken dazu, daß c nach Voraussetzung, a aber laut (4a) reelle Werte sind, so bekommen wir weiter

$$-(\beta + i\gamma) = c(\cos\delta + i\sin\delta)(1 + i\triangle\cdot\mu) \quad (5\text{b})$$

$$Pa\mu_1 = c(\cos\delta + i\sin\delta)(iP\mu + m\omega^2). \quad (6\text{b})$$

Jetzt trennen wir die reellen und imaginären Glieder voneinander:

$$\left.\begin{aligned} -\beta &= c(\cos\delta - \triangle\cdot\mu\cdot\sin\delta) \\ -\gamma &= c(\sin\delta - + \cdot\mu\cdot\cos\delta) \\ Pa\mu_1 &= +c(m\omega^2\cos\delta - P\mu\sin\delta) \\ 0 &= P\mu\cos\delta + m\omega^2\sin\delta \end{aligned}\right| \quad (7)$$

Aus der letzten der vier Gleichungen folgt

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{P\mu}{m\cdot\omega^2}.$$

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, nehmen wir m so klein an, daß

$$\operatorname{tg}\delta = -\infty, \quad \delta = -\frac{\pi}{2}$$

gesetzt werden kann.

Dann ergibt zuerst der dritte von der Gleichung (7)

$$a\mu_1 = c\mu$$

$$c = a\frac{\mu_1}{\mu} = A\frac{\lambda}{\lambda_1}$$

und

$$\xi = A\frac{\lambda}{\lambda_1}\cos\left(\omega t - \mu x + \frac{\pi}{2}\right). \quad (8)$$

Zu dieser Gleichung ist folgendes zu bemerken: Hätten wir die dünne, unendlich lange Saite direkt zu dem Punkte A mit der vorgeschriebenen Schwingung angebunden, so hätten wir eine fortschreitende Welle mit der Amplitude A erhalten. Dadurch, daß die Verbindung mit der Zwischenschaltung eines dickeren Saitenstückes von einer auf die Periode ω resonierenden Länge geschehen ist, haben wir eine $\frac{\lambda}{\lambda}$ mal größere Amplitude hervorgebracht; die aus dem schwingenden Punkte pro Sekunde entzogene Energie aber im Verhältnisse $\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2$, d. h. $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ mal vergrößert. Durch eine Wahl der Länge l doppelt so groß, hätte man umgekehrt die ausgestrahlte Energie ebensovielmal vermindert.

Weiter ergeben die zwei ersten von der Gleichung (7)

$$\beta = -c\cdot\triangle\cdot\mu = -A\cdot\triangle\cdot\mu_1 = -2\pi A\frac{\triangle}{\lambda_1} \quad (9)$$

und

$$\gamma = c = A\frac{\lambda}{\lambda_1}. \quad (10)$$

Diese Werte in ξ_1 eingesetzt, liefern

$$\xi_1 = [A\cos\mu_1(x_1 - l) - A\left(\triangle\mu_1 + \right. \quad (11)$$

$$\left. - i\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\sin\mu_1(x_1 - l)]e^{i\omega t}.$$

Die wirkliche Bewegung wird durch den reellen Teil davon dargestellt, d. h. durch

$$\xi_1 = A[\cos\mu_1(x_1 - l) - \triangle\mu_1\sin\mu_1(x_1 - l)]\cos\omega t$$

$$-A\frac{\lambda}{\lambda_1}\sin\mu_1(x_1 - l)\sin\omega t. \quad (12)$$

Setzt man noch wegen der Kleinheit von $\triangle$

$$\cos\mu_1(x - l) - \triangle\cdot\mu_1\cdot\sin\mu_1(x_1 - l)$$
$$= \cos\mu_1(x_1 - l + \triangle)$$

und berücksichtigt man, daß

$$\mu_1 l = \pi/2$$

ist, so erhalten wir die endgültige Form der Schwingung

$$\xi_1 = A\sin\mu_1(x_1 + \triangle)\cos\omega t + A\frac{\lambda}{\lambda_1}\cos\mu_1 x_1\cdot\sin\omega t \quad (13)$$

Diese Formel gleicht genau der Formel für das Potential der offenen Pfeife. Die durch das erste Glied dargestellte stehende Welle hat seinen Knotenpunkt wie das entsprechende Glied des Potentials (welchem ein Maximum der Bewegung entspricht) — im Punkte $x_1 = -\triangle$ d. h. um die Strecke $\triangle$ **vor** dem Punkte B, wo der Übergang der Dicke ϱ_1 zu ϱ anfängt, also im Punkte C, wo der Übergang eben bereits beendet ist. Analogerweise ist bei der Pfeife die Korrektur wegen dem offenen Ende gleich der Strecke, innerhalb welcher die im Rohre vorhandene ebene Welle sich in die Kugelwelle des freien Luftraumes umwandelt.

Im Felde, Dezember 1916.

(Eingegangen 28. Februar 1917.)

Zur Theorie der Luftspiegelungen.

Von Fr. Nölke.

Wegen der großen Schwierigkeiten ist es bis jetzt nicht möglich gewesen, die bei der anomalen terrestrischen Strahlenbrechung vorliegenden eigenartigen Dichte- und Temperaturverhältnisse der Atmosphäre zu erforschen. Man begnügte sich daher mit besonderen An-

nahmen, die man analytisch formulierte, bestimmte die Lichtstrahlkurven und schloß aus der Form und Lage derselben auf die Art der entstehenden Bilder. Wenn es sich darum handelt, Naturerscheinungen zu erklären, so hat dieses Verfahren jedoch nur sehr bedingten Wert. Wenn man auch zu zeigen vermag, daß sich aus gewissen Voraussetzungen Erscheinungen, die den in der Natur beobachteten einigermaßen entsprechen, herleiten lassen, so ist damit für die Erklärung noch nicht viel gewonnen. Denn die Brücke, welche Theorie und Beobachtung miteinander verbindet, ist erst dann geschlagen, wenn feststeht, daß die theoretischen Voraussetzungen auch für die Naturerscheinungen Gültigkeit besitzen. Betrachtet man die Theorie der Luftspiegelungen von diesem Gesichtspunkte aus, so gerät man in ziemliche Verlegenheit. Es zeigt sich nämlich, daß man sehr verschiedenartige Voraussetzungen formulieren kann, die alle ungefähr zu demselben Ergebnis führen. Solange man nicht imstande ist, sich für eine bestimmte zu entscheiden, können die verschiedenen Erklärungen aber nur als eine interessante Sammlung mathematischer Übungsaufgaben gelten. Auch die vielfach zur Illustration der Naturerscheinungen ausgeführten Versuche, bei denen man durch Übereinanderschichten verschiedener Flüssigkeiten die atmosphärischen Verhältnisse nachzuahmen sucht, haben keinen großen Wert, da es sehr zweifelhaft ist, ob die durch Diffusion der Flüssigkeiten sich herausbildenden Verhältnisse mit den in der Atmosphäre vorliegenden Ähnlichkeit besitzen. Eine wirklich befriedigende Erklärung würde man erst dann gewinnen, wenn es möglich wäre, sich von jeder besonderen, durch einen mathematischen Ausdruck formulierbaren Annahme über die atmosphärischen Dichteverhältnisse frei zu machen und die den Gang der Lichtstrahlen bestimmenden abnormen atmosphärischen Bedingungen in ihrer Allgemeinheit zu erfassen. Wird von einer analytischen Formulierung abgesehen, so bleiben jedoch nur die allgemeinen Begriffe „abnehmende und zunehmende Dichte" übrig, und die auf ihnen sich aufbauende Erklärung nimmt statt des analytischen einen mehr geometrischen, anschaulichen Charakter an. Bei der großen Mehrzahl der Naturerscheinungen mag es wünschenswert sein, die anschauliche, phänomenologische Erklärung durch eine analytische zu ersetzen. In der Theorie der Luftspiegelungen jedoch verdient, da die ununterbrochen wechselnden, labilen Verhältnisse der Atmosphäre sich analytisch doch niemals genau und sicher erfassen lassen, die phänomenologische vor der analytischen zweifellos den Vorzug. Die anschauliche, geometrische Art der Erklärung ist nun zwar schon lange, besonders in populären Lehrbüchern der Physik, üblich gewesen; aber die Darstellung ist meistens eine sehr oberflächliche, nicht selten sogar fehlerhafte. Eine gründliche, erschöpfende Behandlung des Problems scheint bis jetzt nicht vorzuliegen; wir wollen sie im folgenden zu geben versuchen.

Einige sehr wertvolle experimentelle Bestätigungen unserer theoretischen Folgerungen finden sich in zwei Abhandlungen von W. Hillers:

„Photographische Aufnahme einer mehrfachen Luftspiegelung", diese Zeitschrift **14**, 718, 1913.

„Einige experimentelle Beiträge zum Phänomen der dreifachen Luftspiegelung nach Vince", diese Zeitschrift **15**, 304, 1914.

Der Kürze wegen wollen wir diese Abhandlungen mit A und B bezeichnen.

I.

Um eine allgemeine Vorstellung von den bei Luftspiegelungen vorliegenden Verhältnissen zu gewinnen, wählen wir die sogenannte Wüstenspiegelung, bei der bekanntlich unter dem Gegenstande ein umgekehrtes Bild erscheint, als Beispiel. Zunächst muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß in den meisten theoretischen Erörterungen über Luftspiegelungen eine Annahme gemacht wird, die, da sie nur einen besonderen Fall darstellt, der Untersuchung von vornherein den Charakter der Allgemeinheit raubt. Fast stets wird vorausgesetzt, daß der Gegenstand und das Auge des Beobachters sich beide noch innerhalb der Luftschicht befinden, die infolge ihrer Temperatur- und Dichteanomalien den Lichtstrahl von seiner geradlinigen Bahn ablenkt. Außer dieser Möglichkeit gibt es noch drei andere. Auge und Gegenstand können sich ebensowohl außerhalb wie in der betr. Schicht befinden, ferner das Auge in, der Gegenstand außerhalb, und das Auge außerhalb, der Gegenstand in der Schicht. Es genügt, die beiden ersten Fälle zu untersuchen; die beiden letzten, die zwischen den ersten eine mittlere Stellung einnehmen, lassen sich dann leicht beurteilen.

Wir beginnen die Untersuchung mit dem gewöhnlich betrachteten Falle, wo sich Auge und Gegenstand beide innerhalb der lichtbrechenden Schicht befinden, und erinnern zunächst an einige bekannte Definitionen und Folgerungen.

a) Nimmt die Dichte der Luft infolge ihrer starken Erhitzung am Erdboden von unten nach

oben zu, so beschreibt ein sie durcheilender Lichtstrahl eine zur Erdoberfläche konvexe Bahn, die aus zwei symmetrischen Ästen besteht. Ihr tiefster Punkt wird ihr Scheitel genannt. Bestimmt man die Scheitel aller durch einen bestimmten Objektpunkt gehenden Lichtstrahlkurven, so erhält man die diesem Punkte zukommende Scheitelkurve. Aus der Gestalt dieser Kurven lassen sich in Beziehung auf Zahl und Art der entstehenden Bilder wichtige Schlüsse ziehen. Zeichnet man die beiden zu dem Auge des Beobachters und zu einem bestimmten Objektpunkte gehörenden Scheitelkurven, so erkennt man leicht, daß, da die den Schnittpunkten der Scheitelkurven entsprechenden Lichtstrahlen sowohl das Auge wie den Objektpunkt treffen, soviele Bildpunkte entstehen, wie die Kurven Schnittpunkte aufweisen.

Die Gleichungen der Lichtstrahl- und der Scheitelkurven ergeben sich leicht auf folgende Weise. Durch den Objektpunkt und das Auge werde eine Ebene senkrecht zur Erdoberfläche gelegt. Ihre Schnittlinie mit der als eben vorausgesetzten Erdoberfläche sei die x-Achse; das Auge befinde sich in der y-Achse in der Entfernung b vom Nullpunkte. Eine das Auge treffende Lichtstrahlkurve schneide die y-Achse unter dem Winkel α_0; die in einem beliebigen Kurvenpunkte gezogene Tangente bilde mit der y-Achse den Winkel α. Dann besteht nach dem Brechungsgesetze die Gleichung

$$n \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0 .$$

Der Brechungsexponent n ist von der im Punkte (xy) herrschenden Dichte abhängig. Diese ist durch die Entfernung des Punktes von der x-Achse bestimmt. n ist also eine Funktion von y, $n = f(y)$. Da $\sin \alpha = dx : ds$ ist, so erhält man als Gleichung der Lichtstrahlkurve

$$x = \int_y^b \frac{n_0 \sin \alpha_0 \, dy}{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha_0}} .$$

Bedeutet n_s den Wert von n im Scheitelpunkte, so besteht nach dem Brechungsgesetze die Gleichung $n_s = n_0 \sin \alpha_0$. Bezeichnet man die Koordinaten des Scheitelpunktes mit ξ und η, so ist folglich

$$\xi = \int_\eta^b \frac{n_s \, dy}{\sqrt{n^2 - n_s^2}} ,$$

wo $n_s = f(\eta)$ zu setzen ist, da der veränderliche Parameter α_0 nicht mehr vorkommt, die Gleichung der Scheitelkurve des Punktes b.

Der Fall, wo die mit wachsendem y eintretende Vergrößerung des Brechungsexponenten diesem selbst proportional erfolgt, soll, weil er ein bequemes Einteilungsprinzip liefert, besonders betrachtet werden. In diesem Falle ist $n = e^{\lambda y}$, wo λ eine positive Konstante bedeutet. Für die Lichtstrahlkurve findet man die Gleichung

$$\lambda (b - y) = \log \frac{\sin (\lambda x + \alpha_0)}{\sin \alpha_0} ,$$

für die Scheitelkurve

$$\lambda (\eta - b) = \log \cos \lambda \xi .$$

Die Lichtstrahlkurve hat zwei auf der x-Achse senkrechte Asymptoten in den Entfernungen $(\pi - \alpha_0) : \lambda$ und $- \alpha_0 : \lambda$ von der y-Achse; ihr Abstand beträgt also $\pi : \lambda$. Sämtliche Kurven sind einander kongruent. Eigenartig ist, daß auch die Scheitelkurve den Lichtstrahlkurven kongruent ist; nur hat sie die umgekehrte Lage. Sie kehrt nach der x-Achse ihre konkave Seite und erreicht ihren größten Abstand b von der x-Achse im Punkte $\xi = 0$. Hieraus folgt allgemein, daß, wenn die Dichtezunahme langsamer erfolgt, als nach dem Exponentialgesetze, die Scheitelkurven sich immer weiter von ihrer Ursprungsordinate entfernen, daß aber, wenn sie schneller vor sich geht als nach dem angegebenen Gesetze, die Scheitelkurven, bei genügender Dicke der lichtbrechenden Schicht, sich nach ihrer Ursprungsordinate zurückkrümmen.

Die Fig. 1 und 2 beziehen sich auf den ersten Fall, wo die Scheitelkurven sich von ihrer Ursprungsordinate immer mehr entfernen.

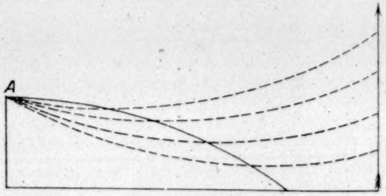


Fig. 1.

Fig. 2.

In Fig. 1 bezeichnen die punktierten Linien verschiedene von den Punkten 1, 2, 3 ... des Gegenstandes (Pfeil) ausgehende, im Auge *A* sich schneidende Lichtstrahlkurven; die von *A* ausgehende ausgezogene Linie ist die Scheitelkurve derselben. In Fig. 2 sind die zu den Punkten 1, 2, 3 ... des Gegenstandes gehörenden Scheitelkurven und die Scheitelkurve des Auges gezeichnet. Da die Scheitelkurve des Auges jede der Scheitelkurven des Gegenstandes nur in einem Punkte schneidet, so gelangt von jedem Punkte des Gegenstandes nur ein Strahl ins Auge des Beobachters. Man erblickt daher nur ein Bild, und zwar, wie aus den Fig. 1 und 2 ohne weiteres ersichtlich ist, ein aufrechtes, aber nach unten verschobenes Bild. Der Gegenstand erscheint tiefer, als er in Wirklichkeit liegt. Da man bei der Wüstenspiegelung zwei Bilder beobachtet, ein aufrechtes und ein umgekehrtes (meistens als Gegenstand und Spiegelbild bezeichnet), so findet der beschriebene Fall bei der Wüstenspiegelung keine Anwendung. Läßt man jedoch die Dichte der Luftschichten in der Richtung der positiven y-Achse nicht zu-, sondern abnehmen, so liegt er bei der Fata Morgana und der Kimmung vor, die bekanntlich darin bestehen, daß ein unter dem Horizonte befindlicher Gegenstand in seiner wirklichen Stellung über demselben emporgehoben erscheint.

Da bei der Wüstenspiegelung zwei Bilder erscheinen, so müssen die Scheitelkurven des Gegenstandes und des Auges so beschaffen sein, daß sie einander in zwei Punkten schneiden können. Dies ist der Fall, wenn sie sich der Ordinate, von welcher sie ausgehen, in ihrem weiteren Verlaufe wieder nähern, wenn sie also eine auf der x-Achse senkrecht stehende Tangente besitzen, die nicht Asymptote der Kurve ist. Dieser Fall ist in Fig. 3 dargestellt[1]). Den Schnittpunkten 5, 4, 3 entspricht ein nach unten verschobenes aufrechtes Bild, den Schnittpunkten 5', 4', 3' ein unter dem aufrechten liegendes umgekehrtes Bild.

Tritt ein mehrfacher Wechsel des Gesetzes, nach welchem die Dichtezunahme in der lichtbrechenden Schicht erfolgt, ein, so nehmen die Scheitelkurven noch andere Formen an. Sie können ihre Richtung von neuem umkehren, also zwei auf der x-Achse senkrechte Tangenten

Fig. 3.

besitzen. In diesem Falle würde die vom Auge ausgehende Scheitelkurve die der Objektpunkte in drei Punkten schneiden können (Fig. 4), was zur Entstehung dreier Bilder Anlaß gäbe, zweier aufrechter (Schnittpunkte 4, 3, 2 und 4'', 3'', 2'') und eines zwischen ihnen liegenden umgekehrten (Schnittpunkte 4', 3', 2') usw.

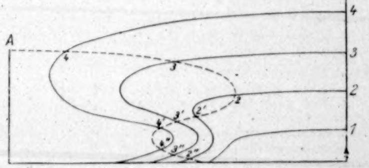


Fig. 4.

b) Wir wollen nunmehr genauer den Anblick bestimmen, den der Beobachter in den drei angegebenen Fällen haben wird. Im ersten Falle (Fig. 2) gelangen von allen Punkten des Gegenstandes, die zwischen 2 und 5 liegen, Lichtstrahlen in sein Auge, aber nicht von dem Punkte 1. Der Fuß des Gegenstandes bleibt ihm also verborgen. Entfernt er sich vom Gegenstande, so rücken die Schnittpunkte der Scheitelkurven nach links und nach unten. Das Bild rückt also tiefer; außerdem werden immer mehr Teile des Gegenstandes unsichtbar, und endlich bleibt nur noch der höchste Punkt desselben sichtbar. Das Umgekehrte tritt ein, wenn sich der Beobachter dem Gegenstande nähert; die unteren Teile des Gegenstandes werden mehr und mehr sichtbar. Ähnliche Folgerungen ergeben sich, wenn sich der Beobachter in senkrechter Richtung bewegt. Steigt er nach oben, so nimmt er allmählich auch den unteren Teil des Gegenstandes wahr; bewegt er sich nach unten, so erblickt er nur noch den oberen Teil. Im zweiten Falle (Fig. 3) sieht der Beobachter die zwischen 3 und 5 liegenden Teile des

1) Beim Zeichnen der Scheitelkurven verschiedener in derselben Ordinate liegender Objektpunkte ist zu beachten, daß sie, wie eigenartig ihr Verlauf auch sein mag, keine Schnittpunkte besitzen. Da in jedem Punkte einer Scheitelkurve der Lichtstrahl wagerecht verläuft, so müßte er nämlich, wenn zwei Scheitelkurven einen Punkt gemeinsam hätten, bei gleichen physikalischen Bedingungen zwei verschiedene Wege einschlagen können, was ausgeschlossen ist.

Gegenstandes aufrecht und umgekehrt. Beide Bilder stoßen unmittelbar zusammen; der untere Teil des Gegenstandes bleibt unsichtbar[1]) (Punkte 1 und 2). Nähert sich der Beobachter dem Gegenstande, so werden immer mehr Teile desselben sichtbar; beide Bilder wachsen von ihrer gemeinsamen Trennungslinie auseinander. Sobald aber die gestrichelten Schnittpunkte unter die x-Achse zu rücken beginnen, wird von dem umgekehrten Bilde der am weitesten nach unten liegende Teil wieder unsichtbar, bis es endlich ganz verschwindet. Bei Entfernung des Beobachters vom Gegenstande wird der aufrechte und der umgekehrte sichtbare Teil desselben immer kleiner; zuletzt verschwindet, gleichzeitig für beide Bilder, die Spitze. Die bei senkrechter Bewegung des Beobachters entstehenden Änderungen der Bilder lassen sich in ähnlicher Weise leicht aus der Figur ablesen; auf ihre Beschreibung wollen wir daher verzichten. Auch die komplizierteren Verhältnisse des 3. Falles sollen nicht weiter erörtert werden, da sie sich aus der Fig. 4 ohne weiteres erschließen lassen. Allen Fällen gemeinsam ist, daß das erste Bild sich nicht mit dem Gegenstande deckt, sondern, da sämtliche Lichtstrahlkurven nach unten konvex sind, nach unten verschoben ist, daß der gesehene Horizont also unter dem wirklichen liegt. Schneidet die zu dem höchsten Punkte des Gegenstandes gehörende Scheitelkurve die Scheitelkurve des Auges noch zwischen Beobachter und Gegenstand, so liegt sogar das ganze erste Bild noch unter der Augenhöhe.

c) Nun drängt sich die Frage auf: Entsprechen die wirklichen Beobachtungen diesen Folgerungen? Ist es jemals bemerkt worden, daß sich bei der Wüstenspiegelung der Horizont senkte und bei der Seespiegelung hob? Hat man beobachtet, daß bei der Wüstenspiegelung gelegentlich nur die Kronen der Palmen und unmittelbar unter ihnen ihr Spiegelbild erschien? Hat man festgestellt, daß bei der Annäherung an den Gegenstand Bild und Spiegelbild immer weiter auseinanderwuchsen, bei der Entfernung aber sich von der Basis her verkürzten und schließlich ganz verschwanden? Von derartigen Beobachtungen wird nicht berichtet; die Richtigkeit der Voraussetzungen, die zu diesen theoretischen Folgerungen führte, erscheint daher als zweifelhaft. Wir gehen nunmehr zur Besprechung der zweiten Möglichkeit über, daß Auge und Gegenstand sich beide außerhalb der lichtbrechenden Schicht befinden.

II.

a) Befinden sich das Auge des Beobachters und der Gegenstand außerhalb der lichtbrechenden Luftschicht, so folgt zunächst, daß der Gegenstand in normaler Weise sichtbar wird, da von ihm aus geradlinige Strahlen in das Auge gelangen können. Um den Charakter der Bilder zu bestimmen, welche durch die in die lichtbrechende Schicht eindringenden Strahlen entstehen, stellen wir die Gleichung der von einem beliebigen außerhalb der Schicht liegenden Punkte P' ausgehenden Strahlen und die Gleichung der zu ihnen gehörenden Scheitelkurve auf. Wir verlegen die x-Achse (Fig. 6) in die untere Grenzebene der Schicht und lassen die y-Achse durch P' hindurchgehen. Die Dicke der Schicht sei b. Ihre obere Grenzfläche schneide die y-Achse im Punkte P und habe von P' den Abstand a. Eine von P ausgehende Lichtstrahlkurve habe den Scheitel s und im Punkte P die Tangente Pt, welche die y-Achse unter dem Winkel α_0 schneide. $P't'$ sei der Tangente Pt parallel. Dann verläuft der Strahl $P't'$ im Innern der Schicht genau wie der Strahl Pt; seine Bahn ist nur um die Strecke $a \operatorname{tg} \alpha_0$ in der Richtung

1) Von der Richtigkeit dieser Folgerung kann man sich, auch ohne daß auf die Scheitelkurven eingegangen wird, überzeugen. Es mögen einige Worte darüber gesagt werden, besonders weil auf diese Weise Gelegenheit geboten ist, auf die Unrichtigkeit einer fast in allen populären Lehrbüchern der Physik zur Veranschaulichung dienenden Figur (siehe Fig. 5) aufmerksam zu machen.

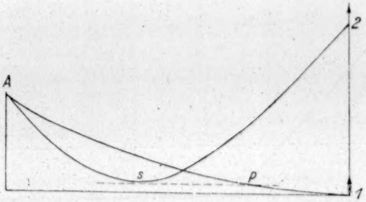


Fig. 5.

Der vom Fußpunkte 1 des Gegenstandes ausgehende Strahl ist anfangs entweder wagerecht oder er steigt aufwärts. Soll ein umgekehrtes Bild entstehen, so muß der von dem Punkte 2 ausgehende Strahl diese Kurve schneiden. Man ziehe durch den Scheitelpunkt der Kurve 2 die Parallele zur Erdoberfläche; sie schneidet die Kurve 1 im Punkte p. Die Kurve 1 durcheilt von p und die Kurve 2 vom Scheitelpunkte s aus dieselben Luftschichten. Da der Lichtstrahl 1 in p schon aufwärts steigt, während der Strahl 2 in s noch wagerecht ist, und beide nunmehr in denselben Luftschichten ihre Brechung erleiden, so müssen sie immer weiter divergieren; sie können also nicht im Auge des Beobachters zusammentreffen. Kommt aus 2 ein Strahl ins Auge, so kann also kein diesen Strahl kreuzender, von 1 kommender Strahl das Auge treffen; d. h. der untere Teil des Gegenstandes bleibt sowohl im aufrechten wie im umgekehrten Bilde unsichtbar.

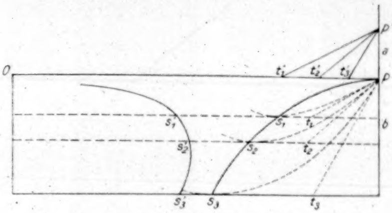


Fig. 6.

der x-Achse verschoben. Die Gleichung der Lichtstrahlkurve von $P't'$ lautet also

$$x = a \operatorname{tg} \alpha_0 + \int_y^h \frac{n_0 \sin \alpha_0 \, dy}{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha_0}}.$$

Beachtet man wieder, daß $n_0 \sin \alpha_0 = n_s$, mithin

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{n_s}{\sqrt{n_0^2 - n_s^2}}$$

ist, so erhält man für die Scheitelkurve die Gleichung

$$\xi = \frac{a\, n_s}{\sqrt{n_0^2 - n_s^2}} + \int_\eta^h \frac{n_s \, dy}{\sqrt{n^2 - n_s^2}},$$

wo $n_s = f(\eta)$ zu setzen ist.

Hat man die Scheitelkurve des Punktes P bestimmt, so läßt sich übrigens die Scheitelkurve eines beliebigen Punktes P' durch bloße Konstruktion finden. Man lege durch die Scheitelpunkte $s_1, s_2, s_3 \ldots$ der von P ausgehenden Lichtstrahlkurven Parallele zur x-Achse und zu ihren Tangenten Pt_1, Pt_2, Pt_3 durch P' ebenfalls Parallele, welche die obere Grenzfläche PO der lichtbrechenden Schicht in den Punkten t'_1, t'_2, t'_3 schneiden. Da die Lichtstrahlkurve des Strahles $P't'_1$ um das Stück Pt'_1 gegen die entsprechende von P ausgehende Kurve verschoben ist, so liegt der zu ihr gehörende Scheitel s'_1 um das Stück Pt'_1 über s_1 hinaus; ähnliches gilt von den übrigen Strahlen. Um die Scheitelkurve des Punktes P' zu finden, braucht man daher nur die Strecken Pt'_1, Pt'_2, Pt'_3 auf den durch s_1, s_2, s_3 gezogenen Parallelen von diesen Punkten aus in der Richtung der positiven x abzutragen. Setzt man das Abtragen der angegebenen Strecken auf den Parallelen fort, so findet man nacheinander die Scheitelkurven von Punkten P'', P''' ..., die über P' liegen und voneinander sämtlich die gleiche Entfernung a haben.

Die Scheitelkurven aller Punkte, ausgenommen die von P und von den im Innern der lichtbrechenden Schicht ausgehenden, nähern sich asymptotisch der oberen Grenzfläche PO. Dies gilt, einerlei nach welchem Gesetze die Dichtezunahme in der Schicht erfolgt. Der Verlauf der Scheitelkurven in der Nähe der unteren Grenzfläche hängt jedoch von dem analytischen Charakter der Dichtefunktion $n = f(y)$ ab. Wir nehmen an, daß sich die Dichte auch bei großen Temperaturgegensätzen in der Atmosphäre nicht sprunghaft ändert, daß die Dichtefunktion in den Grenzflächen der lichtbrechenden Schicht also stetig ist. In der Umgebung des Wertes $y = 0$ kann n dann in eine nach positiven Potenzen von y fortschreitende Reihe entwickelt werden. Bezeichnet man in ihr den Exponenten der niedrigsten Potenz von y mit ν und entwickelt das in der Gleichung der Scheitelkurve auftretende Integral in eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe[1]), so findet man leicht, daß ξ im Punkte $\eta = 0$ für $\nu > 2$ algebraisch unendlich von der Ordnung $\nu/2 - 1$, für $\nu = 2$ logarithmisch unendlich wird, für $\nu < 2$ aber endlich bleibt, ferner, daß die Ableitung von ξ nach η für $\eta = 0$, außer im Falle $\nu = 1$, unendlich wird. Hieraus folgt, daß die Scheitelkurven für $\nu \geq 2$ sich der x-Achse asymptotisch nähern, für $\nu < 2$ aber die x-Achse im Endlichen treffen, und zwar berühren, ausgenommen für $\nu = 1$, in welchem Falle die Kurven unter einem bestimmten Winkel auf die x-Achse stoßen. Der Fall $\nu = 1$ bildet die Grenze zwischen den beiden Scharen der Scheitelkurven, deren eine in der Nähe des Berührungspunktes mit der x-Achse nach der y-Achse konkav, die andere konvex ist. Bezeichnet δ die auf Normaldichte bezogene Dichte der Luft im Innern der lichtbrechenden Schicht, so bringt die Gleichung $n = 1 + 0{,}000\,294\,\delta$ die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Dichte zum Ausdruck. Die niedrigste in n und δ auftretende Potenz von y ist also die gleiche. Da hiernach die Ableitung von δ nach y für $y = 0$ im Falle $\nu < 1$ unendlich, im Falle $\nu > 1$ Null wird, so wächst die Dichte in der Nähe der unteren Grenzfläche der Schicht im ersten Falle schnell, im zweiten langsam. In der Nähe der oberen Grenzfläche ist der Verlauf der Dichtekurve an keine Bedingung gebunden[2]). Bezeichnet man die Werte der Dichte in den Grenzflächen mit δ_u und δ_o, so kann die Dichtekurve in ihrer einfachsten Gestalt also die in Fig. 7 darge-

1) Für $\nu = 2 : m$, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet, ist die Integration auch in geschlossener Form ausführbar.

2) In den beobachteten Fällen scheint der Übergang der veränderlichen in konstante Dichte ein allmählicher zu sein (vgl. W. Hillers, B).

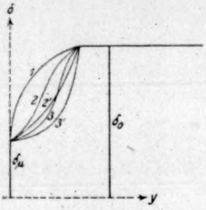


Fig. 7.

stellte Form haben. Die Kurve 1 bezieht sich auf den Fall $\nu < 1$; die Kurven 2 und 2' gelten für $\nu = 1$, die Kurven 3 und 3' für $\nu > 1$.

b) Bei der Diskussion der Bilder sind die Fälle $\nu < 2$ und $\nu \leq 2$ einzeln zu behandeln. 1. Fall: $\nu < 2$. Die Scheitelkurven berühren die x-Achse in endlicher Entfernung von der y-Achse.

α) $\nu < 1$. In der Nähe des Berührungspunktes sind die Kurven zur y-Achse konkav. Den Punkten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ des Gegenstandes entsprechen die Scheitelkurven $k_1, k_2, k_3 \ldots$ (Fig. 8). Das Auge befindet sich in A, in der Entfernung

Fig. 8.

a' von der oberen Grenzfläche PO der lichtbrechenden Schicht. Die in der Figur punktiert dargestellte Linie ist die Scheitelkurve des Auges. Sie schneidet mehrere Scheitelkurven des Gegenstandes $k_1, k_2 \ldots k_6$ je einmal. Da in der Richtung der positiven y-Achse die Schnittpunkte rückwärts zählen, so entsteht ein unter dem Gegenstande liegendes umgekehrtes Bild, das die Punkte a_1 bis a_6 des Gegenstandes umfaßt. Nähert sich der Beobachter dem Gegenstande, so schneidet die Scheitelkurve des Auges immer weniger Scheitelkurven des Gegenstandes; das umgekehrte Bild verkürzt sich also, und zwar von der Spitze her. Im Innern der lichtbrechenden Schicht liegende Punkte des Gegenstandes $(b_1, b_2 \ldots)$ können nicht wahrgenommen werden, da die zu ihnen gehörenden Scheitelkurven die des Auges nicht schneiden.

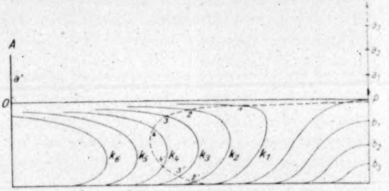


Fig. 9.

β) $1 < \nu < 2$[1]. In der Nähe des Berührungspunktes mit der x-Achse sind die Scheitelkurven des Gegenstandes zur y-Achse konvex (Fig. 9). Eine Reihe von ihnen wird von der Scheitelkurve des Auges wenigstens einmal geschnitten (Schnittpunkte 1, 2, 3, 4); es entsteht ähnlich wie bei α) ein umgekehrtes Bild. Es ist jedoch möglich, daß in der Nähe der x-Achse noch eine zweite Gruppe von Schnittpunkten 4', 3', 2' liegt. Da sie in der Richtung der positiven y-Achse in derselben Reihenfolge auftreten wie die Objektpunkte, so führen sie zur Entstehung eines aufrechten Bildes. Dieses Bild schließt sich dem umgekehrten Bilde unmittelbar an und zeigt dieselben oberen Teile des Gegenstandes wie dieses; die unteren Teile aber fehlen, da die Kurve k_1 zum zweiten Male nicht mehr geschnitten wird[2]. Nähert sich der Beobachter dem Gegenstande, so werden allmählich die oberen Teile des Gegenstandes in dem umgekehrten und dem aufrechten Bilde unsichtbar[3]. In dem aufrechten Bilde rücken die sichtbaren Teile aber näher an den Fuß desselben, und schließlich können bei diesem Bilde sogar im Innern der lichtbrechenden Schicht liegende Teile des Gegenstandes wahrgenommen werden (Punkte $b_1, b_2 \ldots$).

2. Fall: $\nu > 2$. Die Scheitelkurven nähern sich asymptotisch der x-Achse (Fig. 10). Die Scheitelkurven des Gegenstandes werden von der des Auges jede in 2 Punkten geschnitten. Der Gruppe der oberen Schnittpunkte entspricht wieder ein umgekehrtes, der Gruppe der unteren Schnittpunkte ein aufrechtes Bild. Das aufrechte Bild ist ebenso vollständig wie das umgekehrte; es läßt sogar noch Teile des Gegenstandes erkennen, die in der lichtbrechenden Schicht liegen. Bei Annäherung des Beobachters an den Gegenstand

1) Der Fall $\nu = 1$ bedarf keiner besonderen Untersuchung, da bei ihm die Verhältnisse ähnlich liegen wie bei α) oder β).

2) Das umgekehrte und das am Fuße unvollständige aufrechte Bild zeigt sehr schön die Photographie einer dreifachen Luftspiegelung von W. Hillers, A, Abbildung 1 und 2.

3) Vgl. W. Hillers, A, Abbildung 4.

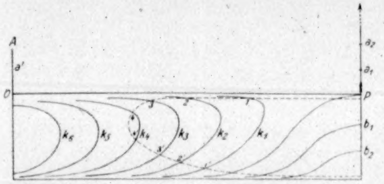


Fig. 10.

verkürzen sich beide Bilder gleichmäßig von der Spitze her. Ungefähr die gleiche Wirkung auf die Bilder wie die Annäherung des Beobachters an den Gegenstand hat in allen drei betrachteten Fällen seine Entfernung von der oberen Grenzfläche der lichtbrechenden Schicht.

Nach allem Gesagten liegt der Scheitel der Strahlen, welche das umgekehrte Bild erzeugen, in Gebieten der lichtbrechenden Schicht, die eine kräftige Dichtezunahme aufweisen, während das aufrechte Bild durch Strahlen erzeugt wird, die in Gebieten mit kleinem Dichtegradienten ihre Umbiegung erfahren. Mit diesen Folgerungen stimmt das experimentelle Ergebnis von Messungen überein, die Hillers ausgeführt hat. Er findet (vgl. B. Schlußabschnitt), daß bei der dreifachen Luftspiegelung 1. ein wenig ausgedehnter Teil geringen Temperaturabfalls in unmittelbarer Nähe der unteren Grenzfläche vorliegt, dem sich 2. ein Gebiet steilen Absturzes anschließt, und daß dann 3. eine asymptotische Annäherung der Temperatur an die Außentemperatur erfolgt.

Je dünner die lichtbrechende Schicht ist, desto kürzer ist der Weg, den die in der Nähe ihrer oberen Grenzfläche umkehrenden Strahlen in derselben zurücklegen, desto mehr nähert sich also auch das umgekehrte Bild einem einfachen Spiegelbilde; es erscheint dann in derselben Größe wie der Gegenstand, nicht verlängert oder verkürzt. Der Scheitelpunkt der das umgekehrte Bild erzeugenden Lichtstrahlen liegt in Gebieten der lichtbrechenden Schicht, die eine kräftige Dichtezunahme aufweisen; diese Strahlen erleiden ihre Hauptkrümmung daher in unmittelbarer Nähe des Scheitelpunktes. Anders bei dem aufrechten Bilde! Soll ein aufrechtes Bild entstehen, so muß in den unteren Teilen der Schicht die Dichte langsam zunehmen. Die in diese Gebiete eindringenden Strahlen erleiden in der Nähe ihres Scheitelpunktes dann nur eine mäßige Krümmung, und die Länge des Gesamtweges, den sie in der lichtbrechenden Schicht zurücklegen, hängt wesentlich von der in ihrer unteren Zone herrschenden Dichteverteilung ab. Durch die Art des Weges der Strahlen in der Schicht wird aber wieder die Richtung ihres Austritts und daher auch die Richtung, in der sie in das Auge eindringen, bestimmt; d. h. das aufrechte Bild ist in Form und Größe dem Gegenstande im allgemeinen weniger ähnlich als das umgekehrte Bild; meistens erscheint es zusammengedrückt [1]).

c) Im allgemeinen haben die Bilder nicht dieselbe Entfernung vom Beobachter wie der Gegenstand. Ihr Ort läßt sich aus den Fig. 8—10 leicht bestimmen. Der Bildpunkt a' eines Objektpunktes a ist die virtuelle Spitze des von diesem Punkte ausgehenden Strahlenkegels, dessen Grundfläche G_A die Augenfläche ist. Die Schnittflächen dieses Strahlenkegels mit der Fläche PO seien G_e (Eintrittsstelle) und G_a (Austrittsstelle). G_e und G_a sind einander ähnliche Ellipsen. Von ihrer Größe und gegenseitigen Entfernung E hängt die Lage des Bildpunktes a' ab, was sich auf folgende Weise zeigen läßt.

Im Innern der lichtbrechenden Schicht zerfällt jede Lichtstrahlkurve durch ihren Scheitel s in zwei kongruente Hälften. Zwei beliebige Strahlen des Strahlenkegels schließen daher nach dem Austritt aus der lichtbrechenden Schicht denselben Winkel miteinander ein wie vor ihrem Eintritt in dieselbe; d. h. der virtuelle Strahlenkegel mit der Grundfläche G_a und der Spitze a' ist dem reellen Strahlenkegel mit der Grundfläche G_e und der Spitze a ähnlich. Ist $G_a = G_e$, so haben also a und a' dieselbe Entfernung von PO. Ist $G_a < G_e$, so liegt der Bildpunkt a' der Ebene PO näher als a, und ist $G_a > G_e$, so tritt das umgekehrte ein. Die Entfernung des Bildpunktes a' vom Beobachter (in der Richtung der x-Achse) hängt in ähnlicher Weise von der Größe der Flächen G_a und G_e ab, außerdem aber auch von ihrer Entfernung E; denn um diese Strecke liegt der Bildpunkt dem Beobachter näher als in dem (z. B. bei der einfachen Spiegelung an der Fläche PO vorliegenden) Grenzfalle, wo Eintritts- und Austrittsstelle des Strahlenkegels zusammenfallen. Im allgemeinen liegen hiernach die Bilder dem Beobachter näher als der Gegenstand; nur im Falle $G_a > G_e$ kann das umgekehrte eintreten.

Nunmehr ist zu entscheiden, von welchen Bedingungen die 3 erwähnten Fälle abhängig sind. Zunächst erkennt man leicht, daß $G_a = G_e$ wird, wenn die Scheitel der in der Ebene der Zeichnung liegenden Lichtstrahlkurven des Strah-

1) Vgl. W. Hillers, B, Abbildungen 5 und 6.

lenkegels sich sämtlich in einer und derselben Ordinate befinden, die Scheitelkurve des Punktes a also an der Stelle, wo sie von der Scheitelkurve des Auges getroffen wird, eine auf der x-Achse senkrecht stehende Tangente besitzt. G_e ist größer als G_a, d. h. die Lichtstrahlkurven verlaufen bei ihrem Eintritt in die lichtbrechende Schicht in größerem Abstande voneinander als bei ihrem Austritte aus derselben, wenn ihre Scheitel sich mit abnehmendem y der y-Achse nähern, und umgekehrt ist G_e kleiner als G_a, d. h. die Lichtstrahlkurven drängen sich an ihrer Eintrittsstelle enger aneinander als an der Austrittsstelle, wenn ihre Scheitel sich mit abnehmendem y von der y-Achse entfernen. Die Fig. 8—10 lassen erkennen, daß das erste für die der Grenze PO benachbarten Teile der Scheitelkurven der Objektpunkte a_1, a_2, . . ., das zweite für die der x-Achse benachbarten Teile derselben zutrifft. Hieraus folgt, daß das den Schnittpunkten 1, 2, 3, 4 entsprechende umgekehrte Bild dem Beobachter näher liegt als der Gegenstand (vgl. Hillers, B), und daß dasselbe wenigstens auch für den dem umgekehrten Bilde zugekehrten Hauptteil des, den Schnittpunkten 4', 3', 2' entsprechenden aufrechten Bildes gilt. Da nach dem Gesagten die Entfernungen verschiedener Punkte der Bilder vom Beobachter nicht dieselbe ist, so würden diese, wenn man sie von der Seite betrachten könnte, den Gegenstand in verzerrter Form erscheinen lassen.

d) Befolgt die Dichtefunktion f im Innern der lichtbrechenden Schicht nicht das früher angenommene einfache Gesetz (vgl. Fig. 7), wächst sie gelegentlich schneller, gelegentlich langsamer, wechselt also ihre 2. Ableitung von Zeit zu Zeit das Vorzeichen, so hat die Scheitelkurve des Punktes P einen gewundenen Verlauf (vgl. Fig. 4). In diesem Falle werden auch noch die ihr zunächst liegenden Scheitelkurven $k_1, k_2 \ldots$ Aus- und Einbuchtungen aufweisen, und da je nach dem Orte des Auges dasselbe auch bei der Scheitelkurve des Auges zutreffen kann, so ist es möglich, daß mehr als zwei Schnittpunktsgruppen entstehen. Jeder Gruppe entspricht ein Bild, dessen Lage, ob aufrecht oder umgekehrt, aus der Figur sogleich zu erkennen ist. Da aber nur verhältnismäßig wenige Scheitelkurven geschnitten werden, so umfassen die Bilder nur beschränkte Teile des Gegenstandes. Auf diese unvollständigen, vielfachen Bilder scheint man noch nicht aufmerksam geworden zu sein, besonders wohl deswegen, weil sie, wie aus dem Gesagten ohne weiteres ersichtlich ist, nur entstehen können, wenn sich der Beobachter dem Gegenstande und der lichtbrechenden Schicht ziemlich nahe befindet. Bei Laboratoriumsversuchen würden sie vielleicht zu erzielen sein[1]). Vier- und fünffache Luftspiegelungen erklären sich besser durch die Annahme, daß zwei Schichten mit veränderlicher Dichte übereinanderliegen und durch eine Schicht konstanter[2]) Dichte voneinander getrennt sind. Es ist dann möglich, daß Strahlen, welche die erste Schicht durchdringen, die zweite unter so kleinen Winkeln treffen, daß sie in dieser ihre Umkehr erleiden. Außer einem umgekehrten kann auch wieder ein aufrechtes Bild erscheinen. Bei drei übereinanderliegenden Schichten würde die Lichtbrechung ein sechs- oder siebenfaches Bild ergeben können. —

e) Die Annahme dieses Abschnittes, daß Beobachter und Gegenstand sich außerhalb der lichtbrechenden Schicht befinden, hat zu folgenden Hauptergebnissen geführt:

1. Der Gegenstand (das 1. Bild) erscheint, da von ihm aus geradlinige Strahlen ins Auge dringen, in seiner natürlichen Größe und an seinem wirklichen Orte.
2. Die Entstehung des zweiten, umgekehrten Bildes ist von dem Gesetze, das die Dichtezunahme in der lichtbrechenden Schicht bestimmt, ganz unabhängig. An der Spitze kann es unvollständig sein.
3. Das dritte aufrechte Bild entsteht, wenn in der dem Gegenstande abgewandten, unteren Grenzfläche der Schicht die veränderliche Dichte unmerklich in konstante Dichte übergeht, wenn also die erste Ableitung der Dichtefunktion für $y=0$ den Wert Null hat. Aber nur wenn auch die zweite Ableitung für $y=0$ den Wert Null oder einen endlichen Wert annimmt, ist es ebenso vollständig wie das 2. Bild. Ist die zweite Ableitung für $y=0$ unendlich, so fehlt ihm der Fuß. Dasselbe ist der Fall oder das Bild fehlt ganz, wenn die erste Ableitung für $y=0$ einen endlichen oder unendlichen Wert besitzt, die Dichtezunahme in der unteren Grenzfläche also nicht allmählich, sondern plötzlich einsetzt (wobei die Dichte selbst natürlich keinen Sprung erleidet).
4. Mehr als dreifache Luftspiegelungen entstehen, wenn zwei oder mehr lichtbrechende Schichten, durch Schichten konstanter Dichte voneinander getrennt,

1) Spuren eines 4. Bildes sind in der Tat von Hillers beobachtet worden; vgl. B. Abbildung 3b.

2) Der normale Dichteabfall in der Atmosphäre braucht nicht berücksichtigt zu werden.

übereinanderliegen, und in jeder Lichtstrahlen zur Umkehr gezwungen werden.

Diese Ergebnisse stimmen mit den Beobachtungen sehr gut überein. Die zugrunde liegende Annahme dürfte daher das Richtige treffen.

III.

Es ist nicht schwer, die wichtigsten Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte auch ohne Benutzung der Scheitelkurven, durch bloße Betrachtung des Verlaufs der gebrochenen Lichtstrahlen, herzuleiten. Es möge dies in Kürze geschehen, da das ganze Verfahren anschaulicher ist und besonders für populäre Lehrbücher der Optik geeigneter erscheint.

1. Einfache Luftspiegelung. Beobachter und Gegenstand (oder der Beobachter allein) befinden sich im Innern der lichtbrechenden Luftschichten.

Nimmt die Dichte der Schichten vom Erdboden nach oben ab, so sind die sie durchdringenden Strahlen in demselben Sinne gekrümmt, wie die Erdoberfläche (Fig. 11). Der

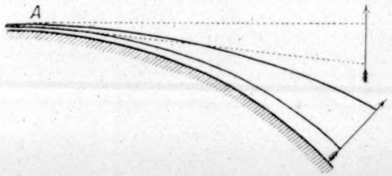


Fig. 11.

Gegenstand erscheint daher in aufrechter Stellung nach oben verschoben (Fata Morgana, Kimmung, Veränderung des astronomischen Ortes der Gestirne am Himmel).

2. Beobachter und Gegenstand befinden sich außerhalb der lichtbrechenden Schicht. Der Gegenstand ist an seinem wirklichen Orte selbst sichtbar.

α) Zweifache Luftspiegelung. Der von einem höher gelegenen Punkte 2 des Gegenstandes ausgehende Strahl muß, weil er steiler einfällt, als der von dem tiefer gelegenen Punkte 1 ausgehende, in der Schicht eine kräftigere Brechung erfahren (Fig. 12). Strahl 2 muß daher in die Schicht etwas tiefer eindringen und in ihr einen etwas längeren Weg zurücklegen als Strahl 1. Es entsteht ein unter dem Gegenstande liegendes umgekehrtes Bild (Wüstenspiegelung, in umgekehrter Lage die Seespiegelung).

Bei einer einfachen Spiegelung an der Linie PO würden sich die reflektierten Strahlen in A'

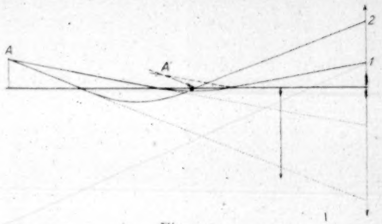


Fig. 12.

schneiden. Da A weiter von dem Gegenstande entfernt ist, als A', der Sehwinkel, unter dem das umgekehrte Bild erscheint, in beiden Punkten aber derselbe ist, so scheint es, als ob dieses Bild stets ein vergrößertes sein müßte. Der Weg, den die Strahlen in der lichtbrechenden Schicht zurücklegen, ist jedoch im allgemeinen so kurz (vgl. II b), daß der Größenunterschied nur in wenigen Fällen bemerkbar sein dürfte. Außerdem ist zu beachten, daß das umgekehrte Bild dem Beobachter stets näher liegt als der Gegenstand (vgl. II c). In den Fig. 12 und 13 ist daher das wirklich geschaute Bild nicht das unmittelbar unter dem Objekte, sondern das seitlich davon liegende. Wegen des großen Abstandes des Objekts und des Bildes vom Beobachter wird in den meisten Fällen jedoch, falls nicht ein Fernrohr auf das eine und das andere scharf eingestellt wird, eine Beurteilung der Verschiedenheit der Abstände unmöglich sein[1]).

β) Dreifache Luftspiegelung. Zum Verständnis der dreifachen Luftspiegelung muß eine Überlegung vorausgeschickt werden. As_1 1 und As_2 2 seien zwei vom Auge ausgehende, in der Schicht zur Umkehr gezwungene Strahlen (Fig. 13). Wenn die Dichteabnahme von oben nach unten kräftig genug erfolgt, so liegen die Scheitelpunkte s_1 und s_2 der Strahlen und daher auch ihre Austrittspunkte aus der Schicht a_1 und a_2 dem Beobachter um so näher, je steiler sie einfallen. Wenn aber in den unteren Gebieten der Schicht die Dichteabnahme von oben nach unten langsamer erfolgt als in den oberen, so können von A steiler einfallende Strahlen, die bis in diese Tiefen eindringen, hier eine so schwache Brechung erfahren, daß ihr Scheitelpunkt und

1) Etwas anders liegen die Verhältnisse bei dem 2. aufrechten Bilde der dreifachen Luftspiegelung. Da die Strahlen, welche dieses Bild erzeugen, einen längeren Weg im Innern der Schicht durchlaufen, so wird es sich vom Gegenstande mehr oder weniger unterscheiden. Sein Ort im Raume liegt ebenso wie bei dem umgekehrten Bilde im allgemeinen dem Beobachter näher als der Gegenstand (vgl. II c).

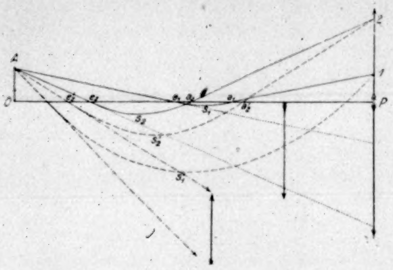


Fig. 13.

damit auch ihr Austrittspunkt aus der Schicht sich wieder von dem Beobachter entfernt. Dann aber folgt, daß von einem Punkte des Gegenstandes zwei verschiedene Strahlen das Auge erreichen können, z. B. von dem Punkte 2 die Strahlen $2 s_2 A$ und $2 s'_2 A$. Ein parallel zu $2 a'_2$ von 1 ausgehender Strahl beschreibt in der Schicht eine der Kurve $a'_2 s'_2 e'_2$ kongruente, nur um das Stück $a'_2 P$ nach rechts verschobene Bahn. Dieser Strahl kann also nicht in das Auge dringen. Ein von 1 ausgehender, noch etwas steiler als $2 a'_2$ einfallender Strahl aber, der etwas tiefer in die Schicht einzudringen vermag als der Strahl $2 a'_2$, wird, da seine Krümmung in den unteren Gebieten der Schicht noch flacher ist, als bei $a'_2 s'_2 e'_2$, diese Kurve ganz umschließend, nach dem Austritt aus der Schicht in das Auge gelangen können (Strahl $1 s'_1 A$). Die ausgezogenen Kurven $1 s_1 A$ und $2 s_2 A$ ergeben (wie bei $2 a$) ein umgekehrtes, die punktierten Kurven $2 s'_1 A$ und $2 s'_2 A$ ein aufrechtes Bild. Da, wenn die untere Grenzfläche der Schicht der oberen etwas näher läge, wohl von 1, aber nicht mehr von 2 aus ein punktierter Strahl das Auge erreichen würde, so können dem aufrechten Bilde die unteren Teile fehlen (von W. Hillers beobachtete Spiegelung an einer Mauer, in umgekehrter Lage die dreifache Seespiegelung).

3. Vier- und mehrfache Luftspiegelungen entstehen, wenn mehr als zwei, durch eine Schicht konstanter Dichte getrennte lichtbrechende Schichten übereinanderliegen (fünffache Luftspiegelung nach Parnell).

Bei der Wüstenspiegelung ist die lichtbrechende Schicht wahrscheinlich mit der flimmernden Luftwelle identisch, die sich unmittelbar über dem Boden ausbreitet. Bei der Seespiegelung dürften die Grenzgebiete zweier übereinander lagernder, verschieden temperierter Luftschichten in Frage kommen. Da diese Übergangsschichten eine größere Dicke erreichen können und mit der Dicke die Wahrscheinlichkeit der Entstehung des dritten Bildes wächst, so werden drei- und mehrfache Luftspiegelungen häufiger inmitten der Atmosphäre, als an ihrem Grunde wahrgenommen.

Bremen.

(Eingegangen 14. März 1917.)

Konzentrationselement und Brownsche Bewegung.

Von P. Debye[1]).

Wie beim Konzentrationselement der Spannungsunterschied zwischen Punkten mit verschiedener Elektrolytkonzentration entsteht, ist allbekannt. Beide Ionen des Elektrolyten diffundieren von Stellen mit höherer Konzentration nach Stellen niederer Konzentration, aber wegen ihrer verschiedenen Beweglichkeit ungleich schnell. Dadurch rücken sie räumlich auseinander, erzeugen indessen infolge ihrer hohen elektrischen Ladungen sofort hemmende elektrische Kräfte, welche ein Gleichgewicht herbeiführen. Mit den sich in dieser Weise einstellenden räumlichen Ladungsüberschüssen sind elektrische Kräfte in der Lösung und damit die Spannungsunterschiede zwischen verschiedenen Punkten derselben ohne weiteres verknüpft.

Die quantitative Formel für den Effekt, welche in bekannter Weise die Spannung verknüpft mit dem log. des Konzentrationsverhältnisses der Beobachtungspunkte, ist in zweifacher Hinsicht interessant.

Erreicht man dieselbe auf thermodynamischem Wege, dann muß man sich, wie z. B. H. A. Lorentz hervorhebt[2]), darüber wundern, daß sie die Ionenbeweglichkeiten enthält, d. h. Größen, welche mit Reibungserscheinungen verknüpft sind.

Will man das Spiel der Kräfte, entsprechend der qualitativen Erklärung, übersehen, dann ist man gewöhnt neben den elektrischen Kräften den osmotischen Druck, als wirkliche an den Ionen angreifende Kraft einzuführen und erzeugt die Endformel unter wesentlicher Hinzuziehung der van't Hoffschen Formel für die Abhängigkeit jenes Druckes von Konzentration und Temperatur[3]). Es ist klar, daß dieses Verfahren nicht als eine kinetische Theorie des

1) Die nachfolgenden Bemerkungen erschienen zuerst im Kleiner-Heft der Physikalischen Gesellschaft Zürich: Nr. 18, 1916.

2) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique, Teubner, Leipzig 1916, S. 78.

3) W. Nernst, Theoretische Chemie, Enke, Stuttgart, 3. Aufl., S. 359 u. 662.

Spannungseffektes angesehen werden kann und so dürfte es kommen, daß H. A. Lorentz[1]) sogar Zweifel äußern kann an der Möglichkeit einer statistisch-kinetischen Erklärung.

Tatsächlich bedeutet die Einführung des osmotischen Druckes vom Standpunkte einer reinen Molekulartheorie zum mindesten einen Umweg. In Wirklichkeit tritt das Diffusionsbestreben der Ionen als Grundeffekt in erster Linie auf. Es wird also nur nötig sein, dieses Bestreben quantitativ zu fassen. Die Diffusion einerseits und die Brownsche Bewegung andererseits sind nun im Wesen dieselben Effekte; eine direkte Heranziehung der Einsteinschen Theorie jener Bewegung[2]) muß uns also in den Stand setzen, die gewünschte Molekulartheorie zu erreichen.

Der einzige Punkt, in dem man über die gewöhnlichen Formeln der Brownschen Bewegung hinauszugehen hat, ist dort, wo man in einer, übrigens auf der Hand liegenden Weise, die zeitliche Variabilität der betrachteten Zustände mit in Rechnung setzen muß. Dadurch wird dann die angestrebte Theorie der Diffusion und des Konzentrationselementes in unmittelbarer Weise verknüpft mit zwei scheinbar unähnlichen Erscheinungen, nämlich erstens mit der bei vielen Flüssigkeiten beobachteten anormalen Dispersion im Gebiete langer Wellen[3]) und zweitens mit der Frage nach der Relaxationszeit des elektrischen Kerr-Effekts[4]).

§ 1. Die Grundformeln der Brownschen Bewegung[5]).

In einem Zylinder, in dessen Längserstreckung die Koordinate x gemessen wird, sind Teilchen (Moleküle, Ionen) suspendiert, an denen zunächst keine Kräfte angreifen. Zur Zeit $t = 0$ sei die Verteilungsdichte gleich $f(x)$, so daß die Anzahl Teilchen in einem Raumelement vom Querschnitte 1 cm² und der Länge dx gleich $f(x)\,dx$ ist.

Man legt sich nun zuerst die folgende Frage vor:

Wenn an der Stelle x ein Querschnitt von 1 cm² Fläche betrachtet wird, wieviel Teilchen gehen dann, während einer kleinen Zeit τ, durch diesen Querschnitt mehr von links nach rechts (positive x-Richtung) als von rechts nach links?

Die Antwort auf diese Frage, welche man auf Grund von im wesentlichen rein geometrischen Überlegungen bekommt, lautet folgendermaßen:

Jedes Teilchen wird während der Zeit τ eine nach Zufallsgesetzen ihrer Größe und Vorzeichen nach bestimmte Verschiebung ξ in der x-Richtung erfahren. Der Mittelwert aller ξ (durch $\overline{\xi}$ dargestellt) ist 0, dagegen hat $\overline{\xi^2}$ einen endlichen Wert. Die gesuchte Teilchenzahl ist gleich

$$-\frac{\overline{\xi^2}}{2}\frac{\partial f}{dx}, \tag{1}$$

die Strömung findet also nur dann statt, wenn ein Konzentrationsgefälle vorhanden ist. Schon mit diesem Resultat allein ist die Theorie des Konzentrationselementes bis zum Ende durchführbar. Allerdings enthält natürlich die Endformel dann als bestimmende Größe jenes mittlere Quadrat der Verschiebung $\overline{\xi^2}$, und zwar in Form des Verhältnisses $\frac{\overline{\xi^2}}{2\tau}$.

Es kann sich nun nur mehr darum handeln, dieses Verhältnis in anderen, der Messung zugänglicheren, Größen auszudrücken.

Das erreicht Einstein dadurch, daß er bemerkt: Wirkt auf die Teilchen eine aus einem Potential U ableitbare Kraft

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

dann erzeugt diese Kraft für jedes Teilchen in der Zeit τ eine zusätzliche Verschiebung von der Größe

$$\frac{F}{\varrho}\tau,$$

wenn unter ϱ die Reibungskonstante in dem Sinne verstanden wird, daß durch ϱ mal Geschwindigkeit die Reibungskraft dargestellt wird. Ein Gleichgewicht ist nur dann möglich, wenn durch keinen Querschnitt eine Strömung stattfindet, wenn also unter Kombination von (1) und (2):

$$-\frac{\overline{\xi^2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{\varrho}\tau f = 0. \tag{3}$$

Nun fordert aber das Boltzmannsche Prinzip, daß die Teilchen nach dem bekannten (der barometrischen Höhenformel ähnlichen) Gesetz

$$f = \text{const}\, e^{-\frac{U}{kT}} \tag{4}$$

verteilt sind, wobei k die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur bedeuten. Die Gleichungen (3) und (4) indessen sind, wie

1) Les théories statistiques en thermodynamique, loc. cit., S. 78.

2) Ann. d. Phys. (4) **19**, 371, 1906.

3) P. Debye, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 777, 1913.

4) Tummers, Dissertation Utrecht 1914. An dieser Stelle findet sich auch die Verallgemeinerung meiner ursprünglichen Überlegungen auf die in Wirklichkeit räumlich beweglichen Molekülen.

5) Dieser Paragraph dient nur als Erinnerung an die Einsteinschen Überlegungen. loc. cit.

durch Einsetzen folgt, nur dann miteinander verträglich, wenn

$$\frac{\overline{\xi^2}}{2\tau} = \frac{kT}{\varrho} \tag{5}$$

ist. Damit ist die Aufgabe erfüllt.

Die Einsteinsche Beziehung (5) ist die einzige Anleihe, welche bei der Statistik zur Behandlung unserer Frage gemacht werden muß. Die Art und Weise, wie die Temperatur und die Gaskonstante[1]), z. B. in der Formel des Konzentrationselementes, auftreten (vgl. § 3), fußt also unmittelbar auf dem Maxwell-Boltzmannschen Gesetz (4).

§ 2. Der zeitlich veränderliche Zustand.

Die Gleichungen für die Ionenkonzentrationen.

Betrachten wir vorläufig noch eine Lösung mit nur einer Art von Teilchen, nennen die Verteilungsdichte wieder f und die Kraft auf ein Einzelteilchen F, wobei diese beiden Größen als Funktionen einer Längserstreckung x in der Lösung und der Zeit t angesehen werden. Durch einen Querschnitt von 1 cm² an der Stelle x gehen dann in der kurzen Zeit τ im ganzen

$$G = -\frac{\overline{\xi^2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{\varrho}\tau f$$

Teilchen, wie schon Gleichung (3) zeigt, welche ja als linkes Glied die Darstellung dieser Teilchenzahl enthält.

Durch einen Querschnitt von ebenfalls 1 cm², der aber um dx weiter nach rechts liegt, gehen in derselben Zeit τ

$$G + \frac{\partial G}{\partial x}dx$$

Teilchen.

Das zwischen beiden Querschnitten liegende Raumelement erhält also in der Zeit τ einen Zuwachs von

$$-\frac{\partial G}{\partial x}dx = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\overline{\xi^2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{\varrho}\tau f\right]dx$$

Teilchen.

Dieser Zuwachs kann aber auch in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}[f\,dx]\cdot\tau$$

geschrieben werden, so daß man zur Bestimmung von f als Funktion von x und t, nach Division mit $\tau\,dx$ die Differentialgleichung erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\overline{\xi^2}}{2\tau}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{\varrho}f\right]. \tag{6}$$

Von Anfang an schon wollen wir für $\frac{\overline{\xi^2}}{2\tau}$ den in (5) angegebenen Wert einsetzen und erhalten dann als Grundgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F}{\varrho}f\right] = 0, \tag{6'}$$

welche für jede Teilchenart und für jede Kraft F Gültigkeit haben muß.

Gehen wir jetzt zu einem Elektrolyten über, dessen Molekül in zwei Ionenarten mit den Ladungen $p_1\varepsilon$ und $-p_2\varepsilon$ auseinanderfallen möge. Dabei bedeutet ε die absolute Elektronenladung und p_1 bzw. p_2 die Wertigkeit des betreffenden Ions. Die Zahl der positiven Ionen pro cm³ sei n_1, die der negativen n_2. Die einzige Kraft, welche wir in Betracht ziehen wollen, sei die elektrische, von den Ionenladungen herrührende[1]); auf die Einheitsladung berechnet, habe sie den Wert X.

Für die positiven Ionen erhält man dann die Verteilungsgleichung, indem in (6') für f die Größe n_1 und für F der Wert $p_1\varepsilon X$ substituiert wird. Sie lautet also

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho_1}\frac{\partial n_1}{\partial x} - \frac{p_1\varepsilon}{\varrho_1}Xn_1\right] = 0, \tag{7}$$

wenn die Reibungskonstante für die positiven Ionen mit ϱ_1 bezeichnet wird.

Ebenso erhält man für die negativen Ionen, wenn man die zugehörigen Größen mit dem Index 2 bezeichnet

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho_2}\frac{\partial n_2}{\partial x} + \frac{p_2\varepsilon}{\varrho_2}Xn_2\right] = 0. \tag{7'}$$

Die beiden Gleichungen (7) und (7') wären zur Bestimmung der beiden Ionenkonzentrationen ausreichend, wenn man über die elektrische Kraft X frei verfügen könnte. Nach den Grundgesetzen der Elektrostatik aber ist das Gefälle von X in bekannter Weise mit der räumlichen Ladungsdichte durch die Divergenzgleichung verknüpft. Dieselbe hat in unserem Falle die Form

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 4\pi(p_1 n_1 - p_2 n_2)\varepsilon, \tag{7''}$$

da durch

$$(p_1 n_1 - p_2 n_2)\varepsilon$$

1) Da wir es vorziehen, mit molekularen Größen zu rechnen, wird bei uns überall an Stelle der Gaskonstanten die Boltzmannsche Konstante $k = 1{,}35 \cdot 10^{-16}$ erg stehen, welche erst durch Multiplikation mit der Avogadroschen Zahl $6{,}15 \cdot 10^{23}$ die übliche Gaskonstante $8{,}31 \cdot 10^7$ erg liefern würde.

1) Elektromotorische Kräfte anderer Herkunft, z. B. durch die Schwere hervorgerufen, bleiben also außer Betracht.

die räumliche Ladungsdichte gemessen wird. Die drei Gleichungen (7), (7′), (7″) reichen aus, um die zwei Ionenkonzentrationen und als dritte Unbekannte die Feldstärke als Funktionen von Zeit und Ort zu bestimmen[1]).

§ 3. Diffusion. Spannung des Konzentrationselements.

Für die allermeisten Zwecke der Elektrolyttheorie ist es unnötig, die für eine strenge Behandlung recht unangenehmen Gleichungen (7), (7′), (7″) ohne Vernachlässigungen beizubehalten. Die räumlichen Ladungsüberschüsse, welche bei den Elektrolyten auftreten, sind nämlich stets äußerst gering, verglichen mit den enormen Absolutwerten, welche in den Lösungen an Ladung vorhanden sind. Dementsprechend empfiehlt sich das folgende Verfahren der sukzessiven Näherung, das im ersten Schritt alles praktisch Wichtige liefert.

Man geht aus von der Annahme, das Gefälle der Feldstärke X sei streng Null und schließt aus (7″) auf die Abwesenheit von Ladungsüberschüssen; in Formel

$$p_1 n_1 = p_2 n_2 . \tag{8}$$

Die durch $p_1 n_1$ bzw. $p_2 n_2$ dargestellte Zahl der positiven bzw. negativen Elementarladungen im cm³, nennen wir abkürzend z, so daß

$$p_1 n_1 = p_2 n_2 = z. \tag{8'}$$

Zugleich in (7) und (7′) kann man nun die beiden Unbekannten n_1 und n_2 durch die eine z ersetzen. Man hat dann noch zwei Gleichungen zur Bestimmung der zwei Größen z und X von der Form

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho_1}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{p_1 \varepsilon}{\varrho_1} X z\right] = 0 \,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho_2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{p_2 \varepsilon}{\varrho_2} X z\right] = 0 \,, \tag{9'}$$

in erster Näherung.

Im allgemeinen wird hieraus X sich so ergeben, daß die Annahme

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

nicht erfüllt ist. Eine zweite Näherung würde dann erreicht werden können, indem man nun zum zweiten Male (7″) benutzt, aber jetzt nach Einsetzen des eben erhaltenen Wertes $\frac{\partial X}{\partial x}$ in erster Näherung. Mit der so bekannten Differenz $p_1 n_1 - p_2 n_2$ hätte man dann in (7) und (7′) einzugehen, um die drei Variabeln wiederum auf zwei zu reduzieren und neue, bessere Werte für X und die Ionendichten n_1 und n_2 zu finden. Der neue Wert von X wäre dann wieder in (7″) einzusetzen und so hätte man fortzufahren. Wie bemerkt, liefert aber bei den Elektrolyten schon die erste Näherung alles vom wesentlichen Interesse. Richtet man dementsprechend in (9) und (9′) zunächst sein Augenmerk auf z allein, dann hat man aus diesen Gleichungen X zu eliminieren und erhält:

a) die Theorie der Diffusion.

Die Elimination erfolgt durch Multiplikation von (9) mit ϱ_1/p_1, von (9′) mit ϱ_2/p_2 und nachfolgender Addition. So bekommt man

$$\frac{\partial z}{\partial t} - kT\frac{p_1 + p_2}{p_1\varrho_2 + p_2\varrho_1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \,, \tag{10}$$

d. h. die bekannte Diffusionsgleichung, in der

$$kT\frac{p_1 + p_2}{p_1\varrho_2 + p_2\varrho_1} = D \tag{11}$$

die Diffusionskonstante bedeutet in üblicher Bezeichnung.

Man erkennt z. B. im Falle eines binären Elektrolyten mit $p_1 = p_2 = 1$ das bekannte Nernstsche, durch die Erfahrung bestätigte Resultat, wonach

$$D = kT \Big/ \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \,,$$

so daß die Diffusionskonstante berechnet werden kann aus den mittels elektrischer Versuche festgestellten molekularen Ionenbeweglichkeiten[1]) $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$.

b) Zur Theorie des Konzentrationselements kommt man, indem man nunmehr auf Grund von (10) die Konzentration z als Funktion von Ort und Zeit als gegeben ansieht und aus (9) und (9′) die Größe $\frac{\partial z}{\partial t}$ eliminiert. Die Elimination ergibt zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[kT\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{p_2}{\varrho_2}\right)\varepsilon z X\right] = 0,$$

d. h.
$$\tag{12}$$

$$kT\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{p_2}{\varrho_2}\right)\varepsilon z X = \text{const.} \tag{12'}$$

wobei const. eine räumliche (nicht zeitliche)

1) Hier und im folgenden sind stets völlig in ihre Ionen zerfallene Elektrolyte vorausgesetzt. Eine Berücksichtigung des unvollständigen Zerfalls unter Anwendung des Guldberg-Waageschen Gesetzes wäre indessen ohne Schwierigkeit.

1) W. Nernst, loc. cit. S. 360.

Konstante ist, der eine einfache Bedeutung zukommt.

Nach den Angaben am Anfang des § 2 nämlich stellt, unter Berücksichtigung von (5), der Ausdruck

$$-\frac{kT}{\varrho_1}\frac{\partial n_1}{\partial x}+\frac{\varepsilon p_1}{\varrho_1}n_1 X$$

die pro Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 hindurchwandernde Zahl der positiven Ionen dar. Mit Rücksicht auf die Bezeichnung $p_1 n_1 = z$, kann das auch geschrieben werden

$$-\left\{\frac{1}{p_1}\frac{kT}{\varrho_1}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{p_1}{\varrho_1}\varepsilon z X\right\};$$

ebenso findet man für die Zahl der negativen Teilchen, welche pro Zeiteinheit durch den Einheitsquerschnitt hindurchwandern, die Darstellung

$$-\frac{1}{p_2}\left\{\frac{kT}{\varrho_2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{p_2}{\varrho_2}\varepsilon z X\right\}.$$

Für die spezifische Stromstärke J erhält man demnach

$$J=-\varepsilon\left\{kT\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}-\left(\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}\right)\varepsilon z X\right\}, \tag{13}$$

da jedes positive Ion die Ladung $p_1\varepsilon$ und jedes negative die Ladung $-p_2\varepsilon$ trägt. Die Gleichung (12) bringt also die bekannte Tatsache der Divergenzlosigkeit des Leitungsstromes zum Ausdruck. Die Konstante des rechten Gliedes hat den Wert $-J/\varepsilon$, so daß man an Stelle von (12') jetzt auch schreiben kann

$$\left(\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}\right)\varepsilon z X-kT\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{J}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Gibt man dieser Gleichung die Form

$$X-\frac{kT}{\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}}{\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}}\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{J}{z\varepsilon^2\left(\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}\right)} \tag{14'}$$

dann kann man sie folgendermaßen interpretieren:

Ist im Elektrolyten die elektrische Kraft X vorhanden, dann wirkt nicht diese Kraft allein stromerzeugend. Vielmehr kommt noch eine durch das Konzentrationsgefälle $\frac{\partial z}{\partial x}$ erzeugte Feldstärke X' vom Betrage

$$X'=-\frac{kT}{\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}}{\frac{p_1}{\varrho_2}+\frac{p_2}{\varrho_2}}\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \tag{15}$$

hinzu. X und X' zusammen erzeugen eine dem Ohmschen Gesetz entsprechende, spezifische Stromstärke J, wobei dem spezifischen Widerstand R des Elektrolyten der Wert

$$R=\frac{1}{z\varepsilon^2\left(\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}\right)} \tag{16}$$

zukommt.

In (16) drückt sich in der bekannten Form das Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen aus.

In (15) kommt die quantitative Grundlage für die Berechnung der Spannung einer Konzentrationskette zum Ausdruck. In üblicher Form bekommt man die gesuchte Spannungsdifferenz V, zwischen zwei Punkten A und B der Lösung, indem man unter Einführung eines Potentials Φ für X die Größe $-\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ substituiert und dann im stromlosen Falle aus (14') schließt:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{kT}{\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}}{\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}}\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Durch Integration zwischen den Punkten A und B ergibt sich hieraus:

$$V=\Phi_B-\Phi_A=-\frac{kT}{\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}}{\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}}\log\frac{Z_B}{Z_A}, \tag{17}$$

was z. B. für $p_1 = p_2 = 1$ mit dem bekannten Resultat in allen Einzelheiten übereinstimmt.

Man wird nicht umhin können, die vorstehenden Überlegungen als eine vollständig kinetische Theorie der in Betracht gezogenen Erscheinungen anzuerkennen. Andererseits wurden gerade im Hinblick auf den vorliegenden Fall Zweifel laut, ob wohl die statistische Theorie das ganze Gebiet der Thermodynamik umfassen könne[1]). Ich bin der Meinung, daß wir einem solchen Zweifel, der, wenn berechtigt, von höchster prinzipieller Bedeutung wäre, keinen Platz zu lassen brauchen. Zur Begründung dieses Standpunktes möge das Obige einen Beitrag liefern.

1) H. A. Lorentz, loc. cit. S. 78.

(Eingegangen 12. März 1917.)

Zur Theorie der freien Elektronen in Metallen.

Von F. v. Hauer.

In einer in den Annalen der Physik[1]) erschienenen Mitteilung habe ich eine Darstellung der Theorie der elektrischen Leitfähigkeit vom Standpunkte der Annahme freier Elektronen in Metallen gegeben, die mir mit der Erfahrung verträglich erscheint.

Ich habe hierbei nach Hinweis auf die zwischen Energieinhalt und elektrischem Widerstand bestehenden Zusammenhänge den Versuch gemacht, den Widerstandssprung beim Schmelzen, also das Verhältnis $\frac{W_{\text{flüssig}}}{W_{\text{fest}}}$ aus dem Temperaturkoeffizienten des Widerstandes, der spezifischen Wärme und der Schmelzwärme zu berechnen. Wenn wir uns den Widerstand W als Funktion des Energieinhalts E dargestellt denken, und T die abs. Temperatur bezeichnen soll, so können wir ja schreiben

$$\frac{dW}{dE} = \frac{dW}{dT}\frac{dT}{dE}.$$

Es sei ferner der Temperaturkoeffizient beim Schmelzpunkt

$a_t = \frac{1}{W_t}\frac{dW}{dT}$ und die spezifische Wärme $c = \frac{dE}{dT}$, so finden wir durch Integration von $\frac{dW}{dE}$ über den Schmelzvorgang als näherungsweisen Ausdruck

$$\frac{W_{\text{flüssig}}}{W_{\text{fest}}} = 1 + \frac{a_t \varrho}{c}.$$

Daraus ließen sich die folgenden Werte berechnen und mit den von verschiedenen Beobachtern gefundenen vergleichen.

	$1 + \frac{a\varrho}{c}$	$\frac{W_{\text{flüssig}}}{W_{\text{fest}}}$
Blei	1,66[2])	1,9; 1,95
Kadmium	1,89[2])	1,8; 1,97; 1,96
Kalium	1,44	1,44; 1,44; 1,69
Natrium	1,36	1,35; 1,37; 1,70
Quecksilber	1,3?	4,04; 4,1; 4,08; 4,9
Zink	1,96	2,0
Zinn	2,18	2,2; 2,12; 2,21; 2,10
Antimon	< 1	0,7

Diese Berechnung ist natürlich, worauf schon l. c. hingewiesen wurde, in mancher Hinsicht unsicher und die ziemlich gute Übereinstimmung der dort gegebenen Zahlen zum Teil sicher Zufall; bei der Berechnung der Zahlen wurde nämlich, da a_t beim Schmelzpunkt meist nicht bekannt ist, stattdessen a_0 (bei 0° C) eingesetzt[1]), was nur eine sehr rohe Näherung ist. Ich habe mich bei Blei und Zink, wo die notwendigen Daten zur Verfügung stehen, durch Konstruktion der Kurve für den Widerstand als Funktion der Energie überzeugt, daß in diesen beiden Fällen (und wohl auch sonst bei hoher Schmelztemperatur) die Übereinstimmung so schlecht ist, daß sie höchstens qualitativ genannt werden kann, und zwar auf einen Zusammenhang zwischen Widerstand und Energieinhalt hinweist, aber nicht so gedeutet werden darf, daß es eine Beziehung $W = f(E)$ gäbe, die ohne weiteres über den Schmelzpunkt hinaus gültig bliebe. Es ist dies in meiner weiteren Darstellung auch nicht geschehen, sondern ich habe unter Zugrundelegung des von Herzfeld begründeten Ausdruckes $E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{K}} - 1}$ für die Energie des freien Elektrons und der Annahme eines thermodynamischen Gleichgewichts in einer Phase die Elektronenkonzentration in ihrer Temperaturabhängigkeit berechnet. In ähnlicher Form ließ sich die Abhängigkeit aus der Thomsonschen Formel für die Thomsonwärme geben. Die Gegenüberstellung beider Ausdrücke ermöglichte die Vernachlässigung eines noch unbekannten Faktors und infolgedessen die zahlenmäßige Berechnung der Elektronenkonzentration aus dem Richardsoneffekt, für den auf diesem Wege eine mit der Erfahrung gut stimmende Formel gegeben werden konnte. In Verbindung mit Wiens Formel für die freie Weglänge der Elektronen war diese Darstellung dann in Übereinstimmung mit dem Temperaturverlauf des elektrischen Widerstandes, und des Verhältnisses der elektrischen zur Wärmeleitfähigkeit, dem Richardson- und Thomsoneffekt und, da die Zahl der freien Elektronen klein gegen die der Atome gefunden wurde und ihre Energie nach Herzfelds Formel mit der Temperatur stark abnimmt, mit den Angaben über die spezifische Wärme.

Seitdem habe ich die hierbei erwähnten Versuche zur Bestimmung der Elektronenkonzentration weitergeführt, leider jedoch ohne zu einem positiven Erfolge zu gelangen, weshalb ich sie nur ganz kurz erwähnen möchte. Es handelte sich darum eine vermehrte Leitfähigkeit, durch eine Influenzladung hervorgerufen, fest-

1) Ann. d. Phys. 51, 189, 1916.
2) Vgl. Anm. 3.

1) Bei *Pb* und *Cd* ist l. c. statt α_0 gesetzt $\alpha + \beta t + \gamma t^2$ (t = Schmelztemperatur), was den Fehler aber nicht kleiner, sondern größer macht.

zustellen, wie dies schon Bose mit dünnen Metallplatten versucht hatte. Ich erwartete mit dünnen Wollastondrähten zum Ziele zu kommen, die kaum starke Runzeln und Spitzen haben können, in denen sich die Influenzladung zusammendrängt (wie dies bei den dünnen Platten von Bose eingewendet wurde), weil sie sonst wohl schon bei der Erzeugung reißen würden. Solche an beiden Enden an Kupferdrähte angelötete Wollastondrähte wurden nun in einen Zylinderkondensator gebracht und in eine Wheatstonsche Brückenanordnung zur Messung ihres Widerstandes eingeschaltet. Das Aufladen des Zylinders zur Erzeugung einer Influenzladung bewirkte jedoch stets starke Dehnungen des Drahtes, die eine starke und recht unregelmäßige Änderung des Widerstandes zur Folge hatten. Belastung des Drahtes half dagegen nichts; nach Aufkleben auf eine isolierende Unterlage verschwinden zwar diese Störungen, aber dann kriecht anscheinend die Influenzladung sofort in das Dielektrikum hinein, wo sich die Elektronen anlagern; denn es konnte der gesuchte Effekt nicht gefunden werden. Schließlich besteht auch noch die Möglichkeit, daß sich die die Influenzladung bildenden Elektronen schon zum größten Teil an die Metallatome anlagern und dann die Leitfähigkeit nicht wesentlich beeinflussen können. Jedenfalls glaube ich, daß das Nichteintreffen des Effektes nicht als gegen die Annahme freier Elektronen im Metall sprechend aufgefaßt werden darf.

Tatsächlich ist ja dieser doch gewiß so fruchtbare Gedanke, daß sich im Metall freie Elektronen bewegen, wegen gewisser Schwierigkeiten in letzter Zeit von manchen verworfen worden. Da er der oben skizzierten Darstellung ebenfalls zugrunde liegt, möchte ich in diesem Zusammenhange auf einige kürzlich dagegen erhobene Einwände entgegnen. Gelegentlich der Aufstellung von Grundlagen für eine Kontakttheorie (phoretische Theorie) der elektrischen Leitung[1]), die davon ausgeht, die Elektrizitätsleitung im Metall sei durch Übertragung der Elektronen von einem Atom auf das andere bei Zusammenstößen hervorgerufen, hat Herr Benedicks die folgenden Einwände angeführt.

„Von jeder Theorie der Leitung der Metalle muß gefordert werden, daß sie im allgemeinen eine verbesserte Leitung ergibt, wenn die Atomabstände abnehmen."

Die Atomabstände können durch Druck und Zug geändert werden, außerdem sind sie bei verschiedenen Metallen von vornherein verschieden, wie sich aus den Werten für das Atomvolum bzw. Kovolum ergibt. Die beobachteten Widerstandsänderungen sind dabei im allgemeinen so, daß sie obigen Satz zu rechtfertigen scheinen. Da nun kleinere Atomabstände eine kürzere freie Weglänge bedingen, so kann man hierin einen Widerspruch mit der Theorie der freien Elektronen erblicken, die ja die Leitfähigkeit proportional der freien Weglänge setzt. Aber demgegenüber muß immer wieder betont werden, daß durch Druck und Zug nicht nur die freie Weglänge geändert wird; sehr wahrscheinlich ändert sich hierbei auch die Zahl der freien Elektronen. Die Theorie der freien Elektronen sagt aber hierüber gar nichts aus, ebensowenig, wie über die absolute Größe des Widerstandes, so daß sogar das Vorzeichen der zu erwartenden Änderungen unbestimmt ist. Außerdem muß daran erinnert werden, daß diese und ähnliche Widerstandsänderungen (wie nach Biegen, Tordieren, Erwärmen) vielleicht gar nicht von diesem Standpunkt aus erklärt werden können, sondern auf gröbere Strukturänderungen zurückzuführen sind. Diese Widerstandsänderungen sind ja auch nicht alle wieder rückgängig zu machen. (Nicht veröffentlichte) Beobachtungen an gedehnten Haardrähten aus Platin haben mir gezeigt, daß die dabei auftretenden Widerstandsänderungen recht unregelmäßig sind und sicherlich solchen Strukturänderungen und nicht nur Änderungen der freien Weglänge und der Zahl der freien Elektronen zuzuschreiben sind.

Eine Schwierigkeit für die Theorie der freien Elektronen bedeutet allerdings die (ebenfalls als solche angeführte) sogenannte Überleitfähigkeit, d. h. das von Kamerling Onnes gefundene Nullwerden des elektrischen Widerstandes beim absoluten Nullpunkt. Ohne eine Zusatzhypothese kann man hier kaum auskommen. Die freien Elektronen scheinen beim Aufhören jeder thermischen Bewegung nicht „festzufrieren", sondern ihre Anzahl sich einem von Null verschiedenen Grenzwerte zu nähern. Man könnte vielleicht annehmen, daß das freie Elektron einer gewissen Minimalgeschwindigkeit bedarf, um sich in den Atomverband eingliedern zu können.

Als weiteren Einwand führt Herr Benedicks die Joulesche Wärme an, von der er sagt, daß sie durch die Theorie der freien Elektronen nicht erklärt werden könne, bzw. daß nicht erklärt werden könne, wie die den Elektronen mitgeteilte kinetische Energie gänzlich zu den Atomen übergehe.

Es läßt sich freilich leicht annehmen, daß jedes Elektron beim Zusammenstoß ohne weiteres gerade den durch die elektrische Arbeit hervor-

1) C. Benedicks, Beiträge zur Kenntnis der Elektrizitätsleitung in Metallen und Legierungen. Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **13**, 351, 1916.

gerufenen Energieüberschuß abgibt; dagegen erscheint es sehr wohl möglich, daß dieser Energieüberschuß bei allen zusammen abgegeben wird, d. h., daß der elektrische Strom das Dissoziationsgleichgewicht der Elektronen nicht ändert. Ferner bleibt das freie Elektron nur sehr kurze Zeit frei und legt hierbei auch nur eine kurze Wegstrecke zurück, dann lagert es sich wieder an und setzt spätestens hierbei seinen Energieinhalt ins Gleichgewicht mit der thermischen Energie. Vielleicht könnte man sogar so weit gehen, als die freie Weglänge des Elektrons den Weg anzusehen, den es vom Atomverbande losgetrennt, d. h. im Zustande frei, zurücklegt. Verbinden wir hiermit die oben für den Eintritt eines Elektrons in den Atomverband gemachte Annahme, wonach bei sehr tiefen Temperaturen das Dissoziationsgleichgewicht kein bewegliches Gleichgewicht ist, so würden sich daraus beim absoluten Nullpunkt freie Weglänge und damit elektrische Leitfähigkeit unendlich groß ergeben.

Wenn also zusammenfassend Herr Benedicks die gaskinetische Elektronentheorie für unhaltbar erklärt, so glaube ich dem widersprechen zu dürfen.

Freiburg i. Üchtland, März 1917.

(Eingegangen 3. März 1917.)

BESPRECHUNGEN.

R. H. Weber und R. Gans, Repertorium der Physik. Erster Band: Mechanik und Wärme, zweiter Teil[1]): Kapillarität, Wärme, Wärmeleitung, kinetische Gastheorie und statistische Mechanik. Bearbeitet von R. H. Weber und P. Hertz. XIV u. 613 Seiten mit 72 Figuren im Text. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner. 1916. Geh. M. 11.—, in Leinwand geb. M. 12.—

Es ist erfreulich, daß dieser zweite Teil des ersten Bandes trotz des Krieges erschienen ist; er ist von den Herren Weber und Hertz allein fertiggestellt worden, da der Druckbogenaustausch mit Herrn Gans in La Plata unmöglich wurde. — Daß gerade diese Art einer zusammenfassenden Darstellung der theoretischen Physik in Klarheit und Gründlichkeit ohne Verteilung des Stoffes an allzuviele Autoren ihre ganz besondern Vorzüge hat, merkt man schon bei einem Durchblättern des Buches.

Von Weber stammen „Kapillarität", „Wärme", „Wärmeleitung", „kinetische Gastheorie", während die „statistische Mechanik" von Hertz bearbeitet ist.

Nächst einer Behandlung der kapillaren Erscheinungen bringt Kapitel IV ein dem Fernerstehenden willkommenes Referat der molekularen und thermodynamischen Theorien der Kapillarität. In dem Abschnitt über Wärme berührt sodann angenehm die Sorgfalt, mit welcher Definitionen und physikalische Gedankengänge gegeben werden. Die neueren Arbeiten werden berücksichtigt, hier z. B. beim Ausdehnungskoeffizienten die Beziehungen von Grüneisen, bei der spezifischen Wärme die Formeln von Thiessen, Einstein, Nernst, Lindemann usw. Sorgfältig ist auch die Zusammenstellung über die Zustandsgleichung und was dazu gehört, man kann sich danach rasch orientieren. Im allgemeinen ist die Darstellung nicht breit, aber leicht faßlich.

Die der eigentlichen Thermodynamik gewidmeten 50 Seiten werden manchem Physiker besonders gefallen — ich verweise hier nur auf den Artikel 107 über umkehrbare und reversible Prozesse. Ebenso ist der Abriß über den zweiten Hauptsatz sehr geschickt gemacht. Der Nernstsche dritte Hauptsatz samt Folgerungen hat selbstverständlich auch die gebührende Aufnahme gefunden. Kapitel IV—VII sind den „Aggregatzuständen", der „Phasentheorie" (Gibbs), den „chemischen Reaktionen" und den „Gemischen nach van der Waals" gewidmet. Bei der Wärmeleitung wird bei Erörterung der Grundlagen übrigens auch Tensorendarstellung benutzt (R. H. Weber, Göttinger Nachrichten 1909), im allgemeinen aber ist von vektorieller Schreibweise weniger Gebrauch gemacht als mancher Leser wünschen wird. — Nächst der Behandlung ein- bis dreidimensionaler Wärmeleitungsprobleme ist auch die Theorie der Meßmethoden vertreten. Bei den „empirischen Gesetzen" findet man die Wiedemann-Franz-Beziehung nebst Diskussion.

Die kinetische Gastheorie bringt zunächst die „elementare Theorie idealer Gase", dann die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Zahl der Lehrbücher über kinetische Gastheorie ist bekanntlich nicht allzu groß — hier liegt eine recht willkommene Ergänzung vor. Manches, z. B. die „Zahlenwerte", würde man gern noch ausführlicher gegeben sehen. Der Beziehung in anderen Gebieten trägt die Darstellung Rechnung. — Charakteristisch — für das Werk überhaupt — ist die Übersichtlichkeit der Zusammenstellungen und die didaktische Sicherheit, mit welcher schwierige Angelegenheiten (siehe Verteilungsgesetzbeweis von Boltzmann!) ihre Erledigung finden.

Auf die „statistische Mechanik" von P. Hertz, welche die letzten 164 Seiten dieses Buches füllt, sei ganz besonders aufmerksam gemacht. Das ist eine hervorragende Arbeit, die jedem Physiker, der sich mit diesem Stoffe bekannt zu machen wünscht, hochwillkommen sein muß. Für den Fernerstehenden ist es nicht leicht, die zum Teil doch recht verschiedenen, und doch analogen Gedankengänge der grundlegenden Arbeiten zu überblicken. Das vorliegende Werk erleichtert das Studium durch seine klare, die springenden Punkte sauber und übersichtlich referierende Art. Der „Zweck" des Abschnittes, wenn man so sagen soll, ist die Entwicklung der thermodynamischen Erscheinungen aus den Grundsätzen der Mechanik.

Nach wertvollen vorbereitenden Betrachtungen über Grundbegriffe und grundlegende Sätze der Me-

1) Besprechung des ersten Teiles: diese Zeitschr. 17, 365, 1916.

chanik wird in den 3 Abschnitten „Theorie der Zeit-, Raum- und virtuellen Gesamtheit" die „allgemeine statistische Theorie der mechanischen Vorgänge" behandelt. — Im einzelnen näher darauf einzugehen dürfte sich erübrigen. Der Artikel ist mit viel Literaturnachweisen und spezielleren erläuternden Anmerkungen versehen und ist trotz seines geschlossenen Lehrbuchcharakters in gewissem Sinne als „Originalarbeit" des auf diesem Gebiete bestens bekannten Autors zu würdigen. —

Dieser ganze erste Band stellt jedenfalls eine sehr erfreuliche Neuerscheinung dar, und es ist nur zu wünschen, daß trotz des Krieges auch der zweite Band bald erscheint. H. Hörig.

Timerding, H. E., Die Analyse des Zufalls. (Die Wissenschaft. Bd. 56.) gr. 8. VIII u. 167 S. Mit 10 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1915. Geh. M. 5.—, geb. M. 5.80.

Dieses eigenartige, in seiner Art jedenfalls vorzügliche Werk erscheint durchaus berufen, dem Physiker, der sich die Grundlagen der statistischen Methoden, welchen er ja in immer noch steigendem Maße sein Interesse zu schenken veranlaßt wird, aneignen will, Anregung zum Nachdenken zu bieten und ein Hilfsmittel zur tieferen Einarbeitung zu sein. Was in dem ersten Kapitel „Der Begriff des Zufalls" besprochen wird, dient durchaus zur Klärung der physikalischen Auffassungsweise des in Rede stehenden Begriffes und beleuchtet treffend die philologisch-philosophischen Betrachtungen, die mit Vorliebe an die Begriffe „Zufall" und „Wahrscheinlichkeit" geknüpft worden sind. Im zweiten Kapitel wird die Rolle des Zufalls in der Statistik erörtert, also schlechterdings der Schritt vom „naiven menschlichen Gefühl" zur zahlenmäßigen Behandlung der Tatsachen vollzogen und die Analyse statistischer Tabellen nach bestimmten Gesichtspunkten als die weitere Aufgabe der Darstellung gekennzeichnet. Dabei wird insbesondere am Schlusse auf die fundamentale Rolle des „Urnenschemas" für die Beurteilung zufälliger Ereignisse eingegangen. (Die Zulässigkeit seiner Benutzung wird im siebenten Kapitel eingehend dargetan.) Es folgt in Kapitel III die Behandlung der stationären Zahlenreihen — die Ermittelung einer stationären Reihe ist geradezu die Aufgabe bei der Aufdeckung irgendeines physikalischen Zusammenhangs — und das vierte Kapitel bringt ausführlich das „Gesetz der großen Zahlen" — Gedankengänge, die jetzt im Kriege ein besonderes Interesse erwecken. Diese Erörterung über die Beziehung des Zufallsbegriffs zum Gesetz der großen Zahlen dürfte als besonders lesenswert zu bezeichnen sein. Die „Theorie der Glücksspiele" bietet naheliegenderweise auch einen gewissen historischen Überblick über das Gebiet. — „Die rein empirische Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als einer bestimmten relativen Häufigkeit oder dem Grenzwerte einer solchen hat sich in der neueren Zeit mehr und mehr durchgesetzt", im Gegensatze zu dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff als dem Maße einer (subjektiven) Erwartung. Die nun folgenden Kapitel „Die mathematische Analyse stationärer Reihen", „Das Urnenschema", „Näherungsformeln", „Die statistische Theorie des Zufalls" und „Die genetische Theorie des Zufalls" bringen eine höchst wertvolle Zusammenfassung verschiedener theoretischer Entwicklungen und Formeln, die man sich sonst beim Studium des Gebietes recht mühsam zusammensuchen muß, so daß dieser Teil des Buches ein besonderes wertvolles, den Überblick erleichterndes Hilfsmittel zur Einarbeitung ist.

Aus der gesamten Darstellung spricht ein tiefes Bewußtsein der großartigen Tatsache, „wie sich auf der Unbestimmbarkeit und anscheinenden Regellosigkeit des einzelnen Falles eine Gesetzmäßigkeit aufbaut und feste in Zahlen ausdrückbare Zusammenhänge in der Gesamtheit sich ergeben". H. Hörig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor für chemische Technologie zu Lemberg Dr. Roman Zaloziecki zum Regierungsrat im Technischen Versuchsamt Wien, der Assistent an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Dr. Karl Müller zum ständigen Mitarbeiter bei derselben, der Privatdozent an der Universität Breslau Dr. Walther Schnee zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig.

Verliehen: Den Privatdozenten für Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Richard Löwenherz und Dr. William Guertler, sowie dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Leipzig Dr. Konrad Schaefer der Titel Professor, dem ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Halle Dr. Gustav Mie, dem ord. Professor der Chemie an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Martin Freund und dem etatsmäßigen Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Ernst Orlich der Titel Geh. Regierungsrat.

In den Ruhestand: Der Dozent für metallurgische Technologie an der Technischen Hochschule Breslau Dr. Engelbert Leber (unter gleichzeitiger Habilitation an der Bergakademie Freiberg i. S.).

Gestorben: Eduard Lumière, einer der Erfinder der Autochromphotographie, infolge Fliegerunfalls, der a. o. Professor für Agrikulturchemie an der Universität Genf Albert Monnier, der Erfinder des Orthoforms Professor Dr. Alfred Eichhorn in München.

Angebote.

Physiker

mit experimentellem Geschick und Verständnis für die Forderungen der Technik für unser Laboratorium gesucht. Angebote mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen und womöglich Lichtbild sind zu richten an

Telegraphie-Gesellschaft m. b. H., System Stille, Berlin W. 30, Nollendorfplatz 9.

Für wissenschaftliche Bearbeitung flugtechnischer Fragen wird ein

Mathematiker oder Physiker

möglichst bald gesucht. Bewerbung mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Gehaltsansprüchen und Angabe des Eintritts erbeten an die

Deutsche Versuchsanstalt f. Luftfahrt, E. V., Adlershof.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

1917.

tiefes
sich
Regel-
ßigkeit
nmen-

rig.

ossen
mög-

echno-
Regie-
sistent
Karl
, der
lther
r Uni-

Tech-
nherz
zenten
aeTer
nental-
, dem
nkfurt
Pro-
schule
ngsrat.
gische
au Dr.
on an

rfinder
er a. o.
Genf
ofessor

is für
Labo-
slauf,
sind

. H.,

).

tech-

ler

pens-
und

. V.,

eipzig.